

Navier, un honnête homme de la mécanique, et les équations de Navier-Stokes

Gérard De Moor⁽¹⁾ et Jean-Claude André⁽²⁾

(1) Météo-France - Direction des ressources humaines
1, quai Branly - 75340 Paris Cedex 07
gerard.demoor@meteo.fr

(2) Centre européen de recherche et de formation avancée en calcul scientifique (Cerfacs) - Toulouse

Résumé

Henri (ou Claude) Navier, scientifique et ingénieur français, a fondé la théorie générale de l'élasticité et établi les équations de Navier-Stokes régissant la mécanique des fluides visqueux. Cet article retrace sa vie et examine pourquoi il peut être considéré, en même temps que le physicien irlandais George Stokes, comme le père des équations qui portent leur nom. Outre d'autres applications, les équations de Navier-Stokes sont à la base de la météorologie et de l'océanographie, l'air et l'eau étant deux fluides qui obéissent à ces équations.

Abstract

Navier, a honest man of mechanics, and the Navier-Stokes equations

The French scientist and engineer Henri Navier based the general theory of elasticity and established the Navier-Stokes equations which govern the mechanics of viscous fluids. This article relates his life and shows why he can be considered, with the Irish physicist George Stokes, as the father of the equations which are called by their names. As well as other applications, the Navier-Stokes equations are at the root of meteorology and oceanography, because air and water are fluids which obey to these equations.

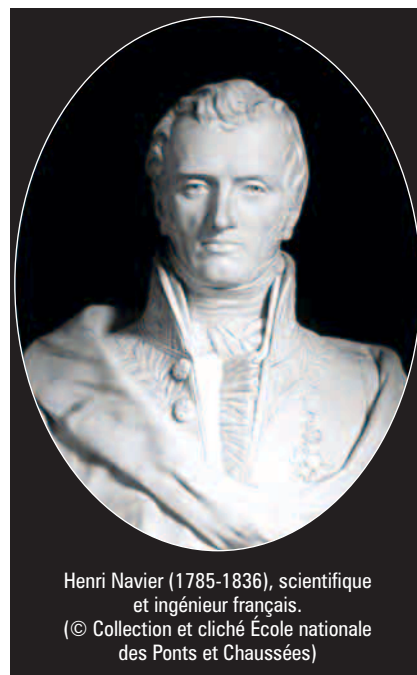
Ndlr Ce texte (sauf l'encadré sur Stokes) est un extrait de « L'art de l'ingénieur, de Perronet à Cacquot », page 21 à 39, paru dans le numéro hors-série des Annales des Ponts et Chaussées édité en 2004 à l'occasion du bicentenaire du Conseil général des Ponts et Chaussées (CGPC). Nous remercions la rédaction des Annales des Ponts et Chaussées et les auteurs de cet article de nous avoir autorisés à le publier.

Claude Louis Marie Henri Navier, éléments sur sa vie et son œuvre

Dans sa séance du lundi 22 août 1836, « l'Académie apprend avec une profonde douleur la perte qu'elle vient de faire d'un de ses membres, M. Navier ». Esprit positif, ingénieur et scientifique brillant, pédagogue remarquable, Henri Navier est décédé la veille. Les deux cents élèves de l'École polytechnique, alors en période d'examen, abandonnent leurs révisions pour assister aux obsèques de leur professeur, dont l'éloge funèbre est prononcé par Gaspard-Gustave Coriolis.

Claude Louis Marie Henri Navier est né à Dijon le 10 février 1785. La mort prématurée en 1793 de son père Claude Bernard Navier, avocat considéré, acteur de la Révolution française (membre de l'Assemblée des notables, député de l'Assemblée législative), a une conséquence déterminante pour l'orientation de sa vie : il se voit confié, à Paris, à la tutelle d'un oncle de sa

mère, Émiland Gauthey, ingénieur renommé, auteur d'ouvrages remarquables comme le canal du Centre, et plus tard inspecteur général des Ponts et Chaussées. Formé aux sciences par ce grand-oncle, Navier entre (de justesse) en 1802 à l'École polytechnique (où il



Henri Navier (1785-1836), scientifique et ingénieur français.
(© Collection et cliché École nationale des Ponts et Chaussées)

subit l'influence scientifique de Joseph Fourier, peu de temps son professeur mais plus tard son protecteur et ami), puis, en 1804, à l'École des ponts et chaussées, dont il sort diplômé en bon rang en 1806. Durant cette période, il trouve du temps pour collaborer aux travaux de son grand-oncle et, en 1806, il publie sur des projets de route, d'auberge, de pont roulant... Après ses études, il contribue à Rome, où il fait la connaissance de Gaspard Riche de Prony, à des travaux de reconstruction et d'aménagement visant à protéger la ville des crues du Tibre.

Gauthey meurt le 14 juillet 1806. Navier estime devoir valoriser l'œuvre de son maître et père adoptif ; il le fera, parfois au prix de sacrifices financiers importants, notamment pour se procurer les manuscrits, dont il n'a pas hérité. Si le premier volume des travaux de Gauthey paraît en 1809 avec peu de compléments significatifs, il n'en est pas de même des suivants (en 1813, le *Traité des ponts* et, en 1816, *Les Canaux de navigation*) qui sont considérablement enrichis par des apports personnels dus aux propres recherches et réflexions de Navier. Ce travail de mémoire sera plus généralement à l'origine d'autres contributions publiées ultérieurement par Navier, par exemple, son *Mémoire sur la flexion des plans élastiques* de 1820. Dans la même démarche de valorisation des travaux de grands anciens, Navier s'intéresse aussi à l'ingénieur ami des philosophes Bernard Forest Bélidor (1693-1761) : il fait paraître une réimpression commentée et revue par ses soins de *La Science des ingénieurs*, en 1813, et de *L'Architecture hydraulique*, en 1819.

En 1810, au département de la Seine, Navier dirige la construction du pont en chêne de Choisy (cinq arches de 20 mètres de portée) ; dans les années suivantes, il travaille à celle des ponts d'Asnières et d'Argenteuil, et de la passerelle de la Cité à Paris. Il publie en 1812 un *Mémoire sur les constructions en pierres perdues exécutées dans la mer*, dans lequel apparaît une modélisation de l'effet de la houle destinée à optimiser la pente des digues en enrochement.

Il épouse en 1812 Marie Charlot, fille de petits propriétaires terriens de Bourgogne (qui sera, après sa mort, très attentive à la publication de ses travaux), et emménage à Saint-Germain-des-Prés (qu'il ne quittera plus de toute sa vie).

La convergence de son goût pour les études, de ses acquis scientifiques et techniques de l'École polytechnique et de l'École des ponts et chaussées, et du sens pratique acquis au contact de Gauthey et de son œuvre, confère à Navier un intérêt et des aptitudes marqués pour le transfert entre la théorie et les applications, qu'il ne cessera jamais de mettre en œuvre.

Entre 1807 et 1820, il fait, par exemple, de l'analyse mathématique un outil de base de l'ingénieur et met le concept émergent de travail mécanique au service de l'art des machines. Ainsi, en 1818, il publie, dans les *Annales de chimie et de physique*, un important mémoire sur l'utilisation du principe des forces vives en mécanique, qu'il prolonge en 1819 en y introduisant ce qui sera baptisé un peu plus tard « travail » par Coriolis. Plus généralement, « l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines » sera par la suite un des thèmes au long cours de son œuvre d'enseignement et de publication pédagogique.

Car c'est très logiquement qu'il est en effet sollicité par l'enseignement : cette même année 1819, il est nommé suppléant du cours de mécanique appliquée à l'École des ponts et chaussées (cours dont il hérite en 1831, à la mort de son titulaire) ; il y dispense alors le premier enseignement structuré de résistance des matériaux et y prône la création d'un « laboratoire » (qui ne voit en fait le jour que dans les années 1850). Navier sera toujours un enseignant hors pair, aura une production d'écrits pédagogiques foisonnante, et dira placer ses titres de professeur plus haut que tous ses autres honneurs.

Au début de la décennie 1820, il publie et/ou présente à l'Académie royale des sciences plusieurs contributions fondamentales à l'étude de l'élasticité et à celle des fluides visqueux :

– le « Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques », lu à l'Académie le 14 mai 1821 (publié au tome VII des *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, en 1827), jette les bases de la théorie générale de l'élasticité (laquelle recevra très rapidement des contributions additionnelles de grands savants contemporains comme Cauchy, Poisson, Lamé, Clapeyron...) ;
 – « Sur les lois des mouvements des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules », publié au tome XIX des *Annales de chimie et de physique* en

1821, et « Sur les lois des mouvements des fluides », lu à l'Académie des sciences le 18 mars 1822 (publié au tome VI des *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, en 1827), propose une formulation du terme de viscosité de l'équation du mouvement des fluides, sur la base d'une analogie formelle avec la théorie de l'élasticité et d'un modèle de force répulsive entre molécules ; ces lois seront retrouvées indépendamment et dans une approche différente en 1845 par George Gabriel Stokes, et seront à l'origine des célèbres et incontournables « équations de Navier-Stokes » régissant le mouvement des fluides visqueux.

Il reste tout aussi actif côté applications et conduit à cette époque deux missions en Angleterre et en Écosse (1821, 1823), sur l'état des chaussées, à l'issue desquelles, entre autres, il analyse les causes de la supériorité des routes anglaises (1822) et publie son novateur « Rapport et mémoire sur les ponts suspendus » (1823) qui est diffusé dans toutes les préfectures. Il est ainsi à l'origine de la construction du premier pont suspendu français (inauguré en 1825 entre Tournon et Tain-l'Hermitage) et replace la France au premier rang dans ce domaine... ce qui lui vaut son élection à l'Académie des sciences.

Le 26 janvier 1824 en effet, l'Académie des sciences l'appelle à siéger dans la section de mécanique, au siège de l'horloger Bréguet. La même année, il fait d'ailleurs faire un nouveau pas à la mécanique, dans ses « Leçons sur la résistance des solides », en rattachant plus complètement la notion de résistance à celle d'élasticité, et publie également une note sur « L'action mécanique des combustibles ».

D'une certaine façon, la vie de Navier bascule en 1826-1827, moins de par sa faute, semble-t-il, que par un concours de circonstances défavorables, avec un événement qu'il évoque souvent par la suite dans ses écrits et qui le laisse inconsolable. Il termine un monumental pont suspendu, d'une seule arche de 155 mètres sur la Seine, entre l'esplanade des Invalides et les Champs-Élysées. Juste avant la fin des travaux, la rupture d'une canalisation des eaux de la ville conduit à des tassements dans les puits et contreforts de retenue et une pile du pont s'écroule ; sous la pression de l'opinion, et passant outre au soutien de la communauté scientifique et à toutes les solutions simples proposées par les défenseurs du projet,

dont Prony, le conseil municipal de Paris fait démolir l'ouvrage. Toutefois, cet épisode malheureux n'empêche pas par la suite la construction de nombreux ponts suspendus partout dans le pays, des accidents plus structurels se produisant sur les premiers ponts haubanés... dont Navier avait déconseillé la réalisation !

Les années 1828 et 1829 voient se développer une interminable polémique, pas toujours sur le seul terrain scientifique, entre Navier et Poisson dans les *Annales de chimie et de physique*, au sujet des « mathématiques de la physique moléculaire » et de l'applicabilité du calcul de la résistance des matériaux ; elles voient aussi la redécouverte indépendante, par Lamé et Clapeyron, des équations de Navier pour la théorie des voûtes. Toujours friand de fluides incompressibles, Navier publie, en 1829, un *Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques dans les vases et les tuyaux de conduite*. En 1830, il est nommé professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique, suite à la démission de Cauchy, parti s'exiler en Suisse. Après la mort de Fourier cette même année, il publie et commente plusieurs mémoires posthumes de celui-ci, notamment *L'analyse des équations déterminées*. En 1831, il est fait chevalier de la Légion d'honneur ; il est officier dès l'année suivante.

Dans la première moitié des années 1830, les dernières années de sa vie, la monarchie de Juillet le charge de plusieurs fonctions officielles. Il retourne par exemple en Angleterre pour reprendre l'étude (qu'il avait abordée déjà en 1826) du chemin de fer, qu'il s'efforce d'imposer en France, et, notamment, celle de la législation en la matière, du mouvement des wagons dans les courbes, de l'emploi des locomotives et de l'influence de la pente... Il travaille et écrit aussi sur la police du roulage et les travaux d'entretien des routes, sur l'exécution des travaux publics et particulièrement des concessions, et s'intéresse aux « moyens de voyager dans l'air et de s'y diriger », aux chaudières des machines à vapeur, au planimètre, ainsi que, semble-t-il, aux propriétés des épicycloïdes... Il participe activement aux mouvements positivistes et saint-simoniens : Auguste Comte est d'ailleurs l'un de ses assistants à l'École polytechnique.

Le mardi 16 août 1836, « *M. Magendie, en qualité de vice-président, annonce à l'Académie qu'un de ses membres,*

M. Navier, est atteint d'une indisposition assez grave. MM. Larrey et Roux sont priés de s'informer de la santé de M. Navier et de lui témoigner de l'intérêt que prend l'Académie à son rétablissement ». Mais, le 21 août, c'est une mort inattendue qui vient mettre un terme à la carrière déjà bien remplie de cet honnête homme des sciences et de l'art de l'ingénieur, « *un peu flegmatique de caractère, mais susceptible de ressentir un attachement durable et sincère, et qui s'était concilié, par l'honorabilité de son existence, une considération unanime* ».

Les équations de Navier (-Stokes) pour les écoulements visqueux

Éléments d'histoire, questions de paternité, sémantique

« *L'obtention des équations du mouvement d'un fluide a été quelque peu tortueuse. En son temps, Euler (1707-1783) avait donné les équations du mouvement d'un fluide non visqueux et dès l'époque de Lagrange (1736-1813), on était conscient de la différence essentielle entre le mouvement d'un fluide où l'on admet l'existence d'un potentiel pour la vitesse et d'un autre où une telle hypothèse n'est pas acceptée. Guidé par une analogie formelle avec la théorie de l'élasticité et par l'hypothèse de molécules animées par des forces de répulsion, le Français L.M.H. Navier (1785-1836) réussit à obtenir les équations du phénomène en 1821, retrouvées ensuite par Poisson (1781-1840) en 1829. Elles furent reprises en 1845, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, par George Gabriel Stokes (1819-1903).* » (René Thom, *Paraboles et catastrophes*, Paris, Flammarion, 1983, note 11, page 179).

Le cœur de la construction des équations qui gouvernent les écoulements fluides réside essentiellement (mais pas seulement !) dans l'application, à chaque « particule fluide élémentaire », de la loi de Newton postulant la proportionnalité de l'accélération à la résultante des forces agissantes. C'est Léonard Euler qui, le premier, réalise cette opération en 1755 ; mais il

manque dans son inventaire des forces, aux côtés de la force de pression, la partie visqueuse des forces internes au fluide, à l'origine du frottement entre filets fluides qui prend naissance partout où existe un gradient de vitesse (provoquant une tendance à l'homogénéisation des vitesses et une dissipation d'énergie cinétique en chaleur). Isaac Newton avait pourtant déjà eu, dans un cadre très simplifié d'écoulement parallèle, l'idée d'une proportionnalité entre tension de frottement et variation normale de vitesse.

Mais c'est bien Claude Louis Marie Henri Navier qui, en 1821, aboutit par une « démonstration » à la traduction générale et correcte dans l'équation du mouvement de l'effet du phénomène de frottement (une force massique de frottement proportionnelle, à travers un coefficient de viscosité, au laplacien de la vitesse fluide), établissant ainsi pour la première fois les équations complètes de la mécanique des fluides (au moins dans le cadre « incompressible »). Mais, outre qu'elle n'a pas une base physique solide, la démonstration de Navier repose à première vue sur des rudiments de théorie cinétique (le titre de sa communication écrite de 1821 exprime clairement le point de vue moléculaire adopté, même si, en réalité, passée l'hypothèse de base elle-même, le traitement de Navier adopte un formalisme plutôt continu). Or, à cette époque, la filière moléculaire, victime du développement de la physique du continu, est l'objet d'une relative désaffection des scientifiques, ce qui semble expliquer qu'il faudra (malgré des contributions intéressantes de Cauchy et Poisson) attendre 1845 pour que la communauté scientifique soit convaincue de la validité des équations de Navier, après que celles-ci ont été retrouvées avec des arguments de mécanique du continu par George Gabriel Stokes (et d'ailleurs avant lui, en 1843, quoique moins clairement, par Barré de Saint-Venant...). Pourtant l'essence intime du phénomène de viscosité est bien d'origine moléculaire : la force de tension visqueuse traduit l'effet, d'une part, du transfert de quantité de mouvement entre portions voisines de fluide par les mouvements moléculaires (en vertu de la première loi de Newton, une variation de quantité de mouvement par unité de temps, fut-elle due à un pur transport, est bien équivalente à une force), d'autre part, directement des forces intermoléculaires elles-mêmes ; le premier mécanisme est largement dominant dans les gaz où, en première approche, les interactions moléculaires

à distance sont négligeables, alors que le second effet a un rôle additionnel très important dans les liquides.

Quoi qu'il en soit, et bien que du seul point de vue du résultat (mais pas de celui de la façon d'y parvenir !) il n'y ait pas grande valeur ajoutée de Stokes, cette double paternité est assez justement reconnue depuis par le nom



George Gabriel Stokes (1819-1903), mathématicien et physicien irlandais. (Photographie de Fradelle & Young, parue dans *Britain's Heritage of Science* de Arthur Shuster et Arthur E. Shipley, Londres, 1917)

« d'équations de Navier-Stokes » donné aux équations régissant la mécanique des fluides (à Navier l'antériorité, à Stokes la manière...). Ce vocable, historiquement et encore le plus souvent, s'applique restrictivement aux équations gouvernant un écoulement à masse volumique invariable dans l'espace et le temps, qualifié souvent d'« incompressible » ; il recouvre alors l'ensemble constitué de l'équation vectorielle, évoquée ci-dessus, exprimant la conservation de la quantité de mouvement (décomposable en

trois équations d'évolution pour les composantes de la vitesse fluide), et de l'équation scalaire exprimant la conservation de la masse, dite de continuité. Il apparaît cependant souvent utile d'étendre le champ de cette dénomination aux écoulements compressibles, et alors d'adjoindre au système historique l'équation exprimant la conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique), laquelle contient un terme de conductibilité thermique, contrepartie pour l'expression du flux moléculaire de

Et Stokes ?

Stokes, un honnête homme de la physique...

Le plus jeune des six enfants d'un pasteur anglican, George Gabriel Stokes est né le 13 août 1819 à Skreen, en Irlande. En 1835, après trois années au Trinity College de Dublin durant lesquelles il est hébergé par un oncle professeur de mathématiques, il gagne l'Angleterre et le collège de Bristol, où il révèle ses qualités en mathématiques. Il entre en 1837 à Pembroke College, à l'université de Cambridge, et en sort en 1841 major et premier lauréat du prix Smith de mathématiques, ce qui lui vaut d'obtenir une bourse de ce collège.

C'est le début d'une carrière scientifique considérable et reconnue, en mathématiques et en physique, particulièrement en hydrodynamique et en optique (mais il s'intéressera aussi beaucoup à la chimie et à la botanique). Dans ces domaines, on mentionne parfois (*Dictionary of scientific biography*, New York 1970-1990) que Stokes aurait poursuivi les travaux des Français – particulièrement Lagrange, Laplace, Fourier, Poisson et Cauchy –, qu'il découvre au début de sa vie scientifique en retrouvant indépendamment leurs résultats par des méthodes différentes.

En 1849, il est nommé – très jeune – professeur à la chaire de mathématiques de l'université de Cambridge, tenue jadis par Isaac Newton, en même temps qu'il enseigne aussi, pour des raisons alimentaires, la physique à l'École des mines de Londres. Il est élu à la Royal Society en 1851, reçoit la médaille Rumford en 1852, en devient secrétaire appointé en 1854, puis président de 1885 à 1890, et s'y voit décerner la médaille Copley en 1893. Il sera aussi membre de la Société royale d'Édimbourg à partir de 1865, président du Victoria Institute de 1886 à 1903, membre du Parlement au titre de

l'université de Cambridge et, enfin, « Master » du Pembroke College en 1902-1903.

En 1857, il se marie et certains biographes voient là la cause principale du tournant que prend alors sa carrière, qui évolue d'une intense activité de recherche théorique vers des tâches plus « expérimentales » et même administratives.

George Gabriel Stokes meurt le 1^{er} février 1903 à Cambridge. Ses œuvres complètes de mathématiques et de physique ont été publiées en cinq volumes entre 1880 et 1905. Il a pu, dans son pays, être comparé à Newton et y a été grandement honoré, en particulier lors de son jubilé à Cambridge. Son influence sur les générations suivantes de scientifiques britanniques a été considérable. Un cratère sur la Lune et un autre sur Mars portent son nom.

... et les équations de Navier-Stokes

Attiré par les travaux de Green et sur les conseils de William Hopkins, son « coach » de mathématiques de Pembroke College, Stokes travaille d'abord sur les fluides visqueux ; ses premiers articles concernent le mouvement des fluides incompressibles et celui des solides élastiques.

C'est en 1845 qu'il publie « On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids » (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol VIII, p. 287), un travail dans lequel il retrouve par des arguments différents les résultats de Navier, Poisson et Barré de Saint-Venant, savants « continentaux » dont les travaux étaient alors méconnus à Cambridge.

Suivront notamment, dans la même thématique, en 1846 un très remarqué rapport sur l'avancement des recherches en hydrodynamique, en 1849 un important travail de géodésie héritier de ses travaux sur les mouvements des pendules dans les fluides (« On the variation of gravity at the surface of the Earth ») et, en 1851, la loi du frottement subi par une petite sphère dans un fluide visqueux et qui porte son nom.

Concernant les équations de la mécanique des fluides auxquelles la postérité a attribué le nom de Navier et le sien, Stokes écrit dans le corps de son article de 1845 : « J'ai par la suite découvert que Poisson avait écrit un mémoire sur le même sujet, et en m'y reportant j'ai vu qu'il était arrivé aux mêmes équations. La méthode qu'il emploie est cependant si différente de la mienne que j'ai estimé légitime de présenter mon travail devant cette Société. » Une note de bas de page à laquelle renvoie cette assertion ajoute : « Les mêmes équations ont été aussi obtenues par Navier dans le cas d'un fluide incompressible (Mém. de l'Académie, t. VI. p. 389), mais ses principes diffèrent des miens encore plus que ceux de Poisson. » Le fait est que l'élégante méthode de déduction des équations proposée par Stokes – celle qui est toujours la base des présentations classiques des ouvrages de mécanique des fluides – n'a pas grand-chose à voir avec celle, plus laborieuse, de Navier. Elle ne s'appuie pas sur un schéma moléculaire du fluide, mais se place directement à l'échelle macroscopique du continuum ; elle repose sur une décomposition locale du champ de mouvement maintenant classique et sur l'application d'hypothèses et de principes physiques simples à la relation entre tensions visqueuses et composantes locales du champ de vitesse.

chaleur du terme de viscosité relatif au flux moléculaire de quantité de mouvement. L'identification du type particulier d'écoulement considéré se fait alors en accolant à l'expression « équations de Navier-Stokes », dans son sens élargi, des qualificatifs comme « incompressibles », « isentropiques »...

Éléments d'analyse des articles historiques de Navier

La contribution historique de Navier aux équations du mouvement des fluides a fait l'objet d'une présentation à l'Académie des sciences le 18 mars 1822, et se trouve développée dans deux contributions écrites :

- « Sur les lois des mouvements des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules », *Annales de chimie et de physique*, tome XIX, 1821 ;
- « Sur les lois des mouvements des fluides » (lu à l'Académie des sciences le 18 mars 1822), *Mémoires de l'Académie des sciences, sciences mathématiques et physiques*, tome VI (1823), 1827.

Les deux contributions se placent dans le cadre d'un fluide incompressible (manifestement un liquide) et motivent l'introduction des actions entre molécules comme une nécessité pour rapprocher les résultats des théories alors connues du mouvement des fluides (les équations d'Euler), qui les ignorent, des « effets naturels » observés. La compréhension de l'ensemble des hypothèses faites par Navier sur ces actions n'est pas chose évidente, et celles-ci feront d'ailleurs l'objet plus tard, de 1828 à 1829, d'une longue polémique avec Poisson dans les *Annales de chimie et de physique* ; au final et d'un point de vue opératoire, elles reviennent à postuler que la force de viscosité au sein du fluide en mouvement résulte de l'existence, par rapport à l'état de repos ou de mouvement d'ensemble du fluide, d'une force additionnelle entre molécules qui est proportionnelle :

- à la composante de leur vitesse relative selon la ligne qui les joint ;
- à une fonction de leur distance qui décroît « très rapidement » vers zéro quand celle-ci augmente.

C'est là la seule « physique » et le seul aspect un tant soit peu « moléculaire » réellement présents dans l'article.

L'article de 1821, que l'on peut considérer comme article fondateur, se

contente de développer les conséquences de l'hypothèse sur l'expression locale de la force de viscosité (il renvoie d'ailleurs pour les détails à une autre contribution récente de Navier, elle aussi de 1821, relative aux lois de l'élasticité, qui contient une mise en équations et un calcul formellement semblables), puis injecte cette force supplémentaire dans les équations d'Euler. L'article de 1823 est plus « autosuffisant », plus complet (les calculs y sont détaillés et les effets liés aux frontières du fluide, parois solides et surface, y sont traités explicitement) et surtout très différent dans sa méthodologie : il repose sur des raisonnements intégraux de type « travaux virtuels » issus de la toute récente mécanique analytique ; on inventorie les forces (cet exercice comprenant l'explicitation d'une hypothèse sur les forces intermoléculaires), on imagine que l'on donne au système une « impulsion » qui se traduit par une perturbation infinitésimale « en δ » des paramètres décrivant le système, on estime les « moments » des forces dans cette perturbation et on égale à 0 la somme sur toute l'étendue du fluide, parois et surfaces libres éventuels comprises, de ces moments des forces appliquées aux molécules. On trouve une brève analyse de cette contribution dans « Navier, Saint-Venant et la création de la mécanique des fluides visqueux », de Bruno Belhoste⁽¹⁾.

Pour l'expression massique de la force de viscosité, le résultat obtenu se présente sous la forme désormais universellement connue du produit d'un coefficient de viscosité par le laplacien de la vitesse. La démarche prévoit bien également l'existence d'un second terme de viscosité, proportionnel au coefficient de viscosité et au gradient de la divergence de la vitesse (elle échoue à en prévoir la valeur classiquement considérée comme correcte, mais ce terme est en fait nul dans le cas d'un écoulement incompressible, à divergence nulle, tel que celui traité par Navier). Enfin, le traitement des effets liés à une éventuelle paroi, présenté dans l'article de 1823, n'aboutit pas à des résultats réalistes parce que l'hypothèse de nullité de la vitesse fluide à la paroi n'est faite, comme pour le fluide d'Euler sans viscosité, que pour sa composante normale (alors que curieusement l'hypothèse de nullité de la vitesse est bien invoquée dans l'article de 1821) ; mais cet échec aux parois, s'il est pénalisant pour les applications,

ne remet pas en cause l'important résultat théorique obtenu sur la viscosité au sein du fluide.

Le point de vue de Navier passe pour être « moléculaire » ; il semble même souvent avancé que ce soit principalement ce qui ait retardé l'acceptation de ses résultats par la communauté scientifique jusqu'aux travaux « continus » de Stokes en 1845. De fait, l'hypothèse de base est présentée comme reposant sur une interaction entre molécules. Mais, dès qu'il s'agit de calculer la somme des actions s'exerçant sur une de ces molécules de la part de toutes les autres, Navier :

- n'hésite pas à se projeter soudain dans un cadre continu en considérant que les vitesses des molécules sont des fonctions différentiables spatialement (!) ;
- se limite aux molécules suffisamment voisines de celle qu'il examine (la pondération spatiale des autres est par hypothèse négligeable) ; il se limite aussi à l'ordre 1 dans le développement de Taylor des vitesses des molécules retenues autour de celle de la molécule considérée (c'est une hypothèse supplémentaire) ;
- utilise (logiquement à ce stade !) une sommation par intégrale et non par sommes discontinues, en ayant en outre parfois recours à des hypothèses d'isotropie des vitesses « moléculaires ».

En fait, si l'on souhaite partir réellement d'une hypothèse au niveau intermoléculaire pour aboutir à des conclusions à l'échelle du continuum (voir ci-après « À l'échelle du continuum »), il faut bien introduire à un moment une analyse statistique des actions moléculaires au sein de la particule fluide élémentaire. Navier n'avait bien sûr pas les moyens de développer un tel point de vue (Clausius et Boltzmann ne viendront que plus tard), et tout se passe en fait comme s'il avait fait directement une hypothèse sur les interactions entre particules fluides continues (ou comme si les propriétés moléculaires se trouvaient uniformes au sein de chacune d'elles) : son point de vue n'est donc pas si moléculaire... et on pourrait aussi faire remarquer que le choix d'une dépendance de la force de viscosité par rapport aux vitesses relatives, avec une portée très petite, et le parti pris de la linéarisation sont des ingrédients qui doivent inévitablement conduire à une expression en laplacien... et qui reviennent à faire « du Stokes » sans le savoir et d'une façon un peu compliquée ! Par ailleurs, même s'il fait l'hypothèse de forces intermoléculaires à très courte portée et s'il

(1) *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 82, 1997.

trouve au final le résultat correct dans l'équation du mouvement, Navier ne semble à aucun moment avoir une idée claire du fait que la force de viscosité a la forme d'une tension au sein du fluide (ce que Newton avait senti), et que le terme massique qu'il cherche à introduire est en fait la divergence de cette tension : c'est une grande faiblesse du point de vue physique.

De là à penser que le travail de Navier n'est pas un coup d'essai, mais un coup de chance, sans véritablement de contenu physique utile, il n'y a pas loin. Ce serait un peu réducteur et facile après presque deux siècles et de nombreuses contributions sur le sujet. Non seulement sa démarche permet à Navier d'exhiber réellement pour la première fois l'équation complète du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, mais elle lui permet, d'une façon certes plutôt obscure et discutable, de pointer l'attention sur l'origine intime du phénomène de viscosité et sur celle du coefficient de viscosité, qui se trouve effectivement, au moins théoriquement, explicité en termes de caractéristiques de la fonction de décroissance avec la distance des forces intermoléculaires évoquées. Notons aussi que l'intuition sous-tendant le postulat d'une dépendance des forces intermoléculaires par rapport aux vitesses relatives est en soi assez heureuse : ce postulat permet d'une certaine façon (un peu floue, et à l'insu de son auteur !) de globaliser les actions sur la viscosité des forces intermoléculaires *stricto sensu* et des transferts de quantité de mouvement par le déplacement des molécules, deux effets qui agissent avec des importances relatives différentes dans les liquides et les gaz, pour fournir au final la même formulation des forces de viscosité (observée, et découlant aussi des arguments continus « à la Stokes ») dans ces fluides *a priori* différents...

Quels sont les fluides et les écoulements qui obéissent aux équations de Navier-Stokes ?

Les équations de Navier-Stokes sont supposées régir le mouvement des fluides newtoniens, à l'échelle du « continuum », dans des conditions de quasi-équilibre thermodynamique local.

Fluides newtoniens

Ce sont les « vrais » fluides (gaz, liquides purs de faible masse molaire...).

Leur viscosité est décrite par un coefficient qui dépend de leur nature, de la température mais pas du gradient de vitesse ; par opposition, la viscosité des fluides non-newtoniens a un comportement plus complexe, fonction par exemple des contraintes appliquées et/ou du temps, et son étude relève de la rhéologie (fluides pseudo-plastiques, rhéoplastiques, thixotropiques, rhéopectiques) : il s'agit des gels, des peintures, du dentifrice, de solutions polymères...

À l'échelle du continuum

Il s'agit de l'échelle la plus petite à laquelle le fluide peut être considéré comme continu, celle de la « particule fluide élémentaire ». Vitesse fluide, pression, température... y sont à interpréter comme les valeurs moyennes des paramètres moléculaires correspondants sur des volumes et des durées de dimensions très grandes devant les caractéristiques du mouvement moléculaire (comme le libre parcours moyen, le temps moyen d'un libre parcours...), mais très petites devant les caractéristiques (taille, temps de retournement...) des plus petits tourbillons présents dans l'écoulement. Pour un écoulement tel (tellement turbulent) qu'il n'y aurait pas de séparation nette entre ces deux familles de caractéristiques, il conviendrait de revenir sur les équations à considérer (en pratique c'est très rarement nécessaire). De même, si pour des raisons pratiques (trop de détails) ou théoriques (instabilité, chaos, turbulence), on doit travailler à échelle plus grande, comme en météorologie ou en océanographie (voir ci-après), il convient de construire les équations d'évolution adaptées à ce nouveau point de vue : ces équations s'obtiennent généralement par moyenne des équations de Navier-Stokes elles-mêmes à la nouvelle échelle choisie (voir ci-après « Chaos, turbulence, prévisibilité ») ; l'écoulement moyen ainsi obtenu n'est en général pas newtonien, mais la transposition de la formulation « en coefficient d'échange » de Navier reste cependant le point de départ de nombreuses approches pratiques de ce type d'écoulement.

Dans des conditions de quasi-équilibre thermodynamique local

En théorie statistique des gaz, on retrouve la formulation de Navier-Stokes, y compris jusqu'à une formulation explicite réaliste des coefficients de viscosité et de conductibilité ther-

mique, en faisant l'hypothèse que la distribution de probabilité des vitesses moléculaires est en chaque point proche de la formulation maxwellienne d'équilibre correspondant à la température locale, et en linéarisant en conséquence l'équation d'évolution (de Boltzmann) de cette distribution (l'hypothèse stricte d'équilibre local conduit aux équations d'Euler, dépourvues de viscosité et de conductibilité thermique). Cet argument ne s'applique pas aussi simplement aux liquides, mais il a l'avantage de suggérer que des gradients des paramètres fluides (vitesse, température...) trop importants peuvent être une condition d'invalidation des équations de Navier-Stokes (en pratique, il apparaît que ce n'est pas très contraignant).

Chaos, turbulence, prévisibilité

Dans certaines conditions, l'écoulement d'un fluide est ou devient erratique, exhibe la présence de structures tourbillonnaires multiples et notamment très petites, et apparaît imprévisible (au moins dans le détail). On dit alors qu'il est turbulent, comportement qui apparaît lorsque le nombre de Reynolds (nombre sans dimension qui mesure l'importance relative des effets non linéaires par rapport aux effets visqueux) atteint de fortes valeurs. Ce type de situation est largement le plus répandu dans la nature et en laboratoire.

Malgré leur relative simplicité de forme, les équations de Navier-Stokes possèdent, elles aussi, cette propriété de générer des comportements extrêmement complexes, apparemment aléatoires et imprévisibles : elles possèdent en effet, dans certaines conditions, des propriétés d'amplification explosive de toutes petites perturbations ou erreurs (« chaos ») qui les rendent inutilisables directement pour simuler ou prévoir des écoulements turbulents (« effet papillon ») en raison du trop grand nombre d'échelles et de structures, de l'instabilité, de la trop grande sensibilité aux données initiales et aux conditions aux limites, à la fois de l'écoulement et des équations.

Il existe un très grand nombre d'approches pour étudier la turbulence : théoriques basées sur les systèmes dynamiques pour l'étude des instabilités et du chaos, scénarios de passage à la turbulence et attracteurs étranges (mis en évidence en premier lieu en météorologie).

Pour des applications pratiques en simulation, du type de celles mentionnées ci-après, il est fait appel à des théories et modélisations statistiques de la turbulence, dans lesquelles le comportement complexe de l'écoulement est moyenné, les quantités ainsi moyennées exhibant un comportement régulier, mais au prix de l'apparition de termes inconnus générés par le caractère non linéaire des termes d'advection. Selon les hypothèses alors faites pour paramétrer ces termes en fonction des autres propriétés macroscopiques de l'écoulement, on parle alors de modèles aux moyennes de Reynolds

(RANS, pour *Reynolds-averaged Navier-Stokes*) ou de modèles aux grandes échelles (LES, pour *Large-eddy simulation*)...

Aspects mathématiques

On peut considérer que les équations de Navier-Stokes sont connues depuis 1845. Pourtant, d'un point de vue mathématique, et essentiellement parce qu'elles sont non linéaires, on sait à ce jour peu de choses sur leur caractère « bien posé » : « pour un état initial donné, y a-t-il une solution, et une solu-

tion unique, à ces équations à tout instant ultérieur ? », question naturellement importante pour la prévisibilité des écoulements que l'on suppose régis par ces équations (la solution calculée est-elle la bonne ? Comment la méthode employée converge-t-elle ?...), indépendamment de toute considération sur la sensibilité aux petites erreurs et le potentiel chaotique des équations.

En 1934, J. Leray a prouvé l'existence d'une solution « faible » au système d'équations de Navier-Stokes incompressibles dans le cas de deux dimensions d'espace (mais le problème est beaucoup plus difficile en dimension trois...). En 1996, P. L. Lions a prouvé l'existence de solutions au système compressible (régissant la vitesse fluide, la pression, la densité et la température) dans le cas particulier d'écoulements « isentropiques ».

Mais, malgré une importante quantité de travaux et de publications, les questions de l'unicité et de la régularité de ces solutions restent ouvertes, et le bilan d'énergie du système ne peut être validé mathématiquement, en raison des irrégularités possibles de la solution. Plus précisément, à faible nombre de Reynolds, le frottement visqueux affecte l'énergie de toutes les échelles présentes dans l'écoulement, et on sait démontrer que le problème est bien posé. À grand nombre de Reynolds, le frottement visqueux affecte seulement les plus petites échelles, le problème est alors voisin de celui du fluide « sans viscosité » (dit encore « parfait » ou « d'Euler »), pour lequel on sait montrer seulement que le problème est bien posé pendant un certain temps limité ; au-delà, une augmentation catastrophique de la vitesse, qui pourrait devenir infinie au bout d'un temps fini, n'est pas exclue. Toutefois, des simulations numériques suggèrent empiriquement que de telles « explosions » du fluide parfait ne se produisent pas, et qu'en fait le problème serait bien posé pour des temps arbitrairement longs (il est aussi désormais connu que certaines solutions abstraites de l'équation d'Euler sans source peuvent voir leur énergie cinétique décroître strictement).

Les équations de Navier-Stokes « incompressibles »

La forme des équations de Navier-Stokes

Pour un fluide de masse volumique ρ constante, les champs de vitesse \vec{u} et de pression p définis à l'échelle du continuum satisfont aux équations :

- du mouvement (expression du bilan de quantité de mouvement)

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{gradient}(p) + \nu \cdot \text{laplacien}(\vec{u})^*$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 accélération forces extérieures force de pression force de frottement visqueux

- de continuité (expression du bilan de masse)
divergence (\vec{u}) = 0

Navier et la force de viscosité

Si les forces « extérieures » sont en général volumiques (exemple : la pesanteur), les forces internes au fluide (forces de pression et de frottement visqueux) sont surfaciques : ce sont des tensions (moléculaires), qui interviennent donc dans l'équation (volumique) du mouvement par leur divergence. C'est Navier qui a, pour la première fois, abouti à la forme en laplacien de la force de viscosité, mais en aveugle de ce point de vue, sans être conscient de sa nature physique de tension visqueuse : le terme d'indices i et j du tenseur des tensions visqueuses a , en fait, la forme sous-jacente (« newtonienne »)

$$\rho \cdot \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

(tenseur dont la divergence, rapportée à l'unité de masse fluide, est bien l'expression de Navier).

La part obscure de l'accélération

L'essentiel des difficultés mathématiques liées aux équations de Navier-Stokes, équations aux dérivées partielles par rapport au temps t et aux coordonnées de position x_i , trouve son origine dans la non-linéarité (par rapport au champ de vitesse) du terme d'accélération de la particule fluide : décomposé selon de telles dérivées partielles, celui-ci apparaît en effet comme la somme d'une « tendance » $\partial \vec{u} / \partial t$ linéaire et d'une « advection » ($\vec{u} \cdot \text{gradient}$) \vec{u} non-linéaire quadratique.

* L'équation, et donc les forces qui y figurent, sont ici rapportées à l'unité de masse du fluide ; ν (noté e par Navier) est le coefficient de viscosité (cinématique) du fluide.

Champs d'utilisation

Il serait vain de chercher à recenser l'ensemble des domaines applicatifs dont l'étude requiert l'utilisation et la résolution des équations de Navier-

Stokes, car de très nombreux fluides en mouvement affectent ou déterminent les phénomènes du monde naturel et/ou industriel, depuis les échelles spatiales les plus petites jusqu'aux échelles spatiales planétaires. Le site informatique du laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand indiquait ainsi récemment qu'en moyenne quinze à vingt articles scientifiques sont publiés chaque semaine sur divers aspects des équations de Navier-Stokes elles-mêmes, sans compter les articles encore plus nombreux qui décrivent les résultats de simulations pour tel ou tel domaine ! Nous ne citerons donc ici que trois exemples, chacun caractéristique d'une partie de cette gamme d'échelles.

Les écoulements biomécaniques

Le sang, qui peut être considéré comme une suspension concentrée d'hématocrites, reste un liquide newtonien tant que le taux de cisaillement de l'écoulement (gradient de vitesse) est inférieur à environ 10^2 s^{-1} , domaine pour lequel la simulation relève donc alors des équations de Navier-Stokes incompressibles.

Cette simulation est particulièrement utile tant pour (i) le diagnostic de certaines maladies (artériosclérose, anévrismes) que pour (ii) la préparation d'opérations réparatrices et (iii) la conception de prothèses. Dans le premier cas (i), il s'agit par exemple de diagnostiquer si existent des zones de recirculation dans certaines sections élargies ou coudées, zones propices aux dépôts, ou encore de quantifier l'écoulement dans les sténoses. L'imagerie médicale (tomographie, imagerie nucléaire ou ultrasonique, résonance magnétique) ne permet pas en effet d'aller au-delà de la détection des caractéristiques géométriques des vaisseaux, et ne permet donc qu'un simple diagnostic qualitatif. Par contre, en association avec la reconstruction de géométries qui lui fournit la forme des vaisseaux, la simulation de l'écoulement sanguin permet de parvenir à un véritable diagnostic quantitatif. Il est ainsi apparu de façon claire que les sténoses sont au moins partiellement reliées aux caractéristiques locales de la circulation sanguine (telles que les taux de cisaillement, le niveau de turbulence, l'importance des circulations induites, le temps de résidence des particules transportées...). Dans le second cas (ii), la simulation permet d'« expérimenter » par réalisation d'études paramétriques : le médecin dispose

alors, non plus seulement d'un diagnostic cardio-vasculaire tiré de mesures *in vivo* au moment de l'examen, mais de projections prédictives relatives aux effets réparateurs attendus d'un traitement médical, qu'il est alors à même d'ajuster pour parvenir au meilleur résultat. Enfin, dans le troisième cas (iii), la simulation à l'aide des équations de Navier-Stokes est essentielle pour la conception et le dimensionnement de prothèses (stents, valves et pompes cardiaques) ou encore d'appareils d'oxygénation sanguine ou de dialyse utilisant le principe de migration à travers une membrane poreuse.

Les écoulements sanguins sont néanmoins très complexes, pulsés et non stationnaires par nature, et en forte interaction avec les parois des vaisseaux, tant mécaniquement (ces parois ne sont pas rigides, mais au contraire se contractent ou se dilatent en phase avec les oscillations de la pression sanguine) que chimiquement (échanges d'oxygène, de lipides, de médicaments...). Leur simulation requiert donc des méthodes et des outils numériques très performants (algorithmes temporels rapides et précis, schémas numériques permettant le transfert d'énergie avec les parois, conditions aux limites non stationnaires aux entrées et sorties...), méthodes et outils actuellement en plein développement et dont la mise en œuvre n'est donc encore que partielle.

De nouvelles applications se sont aussi développées plus récemment dans le domaine de la simulation d'écoulements dans les voies respiratoires, concernant, par exemple, la diffusion de médicaments (*drug delivery*) et la perte d'élasticité des poumons (emphysème pulmonaire).

Les écoulements aéronautiques

La caractérisation et la prise en compte des effets de l'écoulement turbulent de l'air environnant sont primordiales pour déterminer la qualité de vol des avions et leurs performances (aérodynamique dite « externe », par différence avec l'aérodynamique dite « interne » qui régit, quant à elle, la circulation au travers des systèmes propulsifs, de ventilation..., fortement contrainte par la géométrie de ceux-ci). La construction aéronautique civile a donc, assez normalement, été l'un des domaines où, depuis de nombreuses décennies, la mécanique des fluides numérique a été prise en compte de

façon progressivement complexifiée, en complément aux essais en soufflerie et aux essais en vol. Pour ne citer que quelques étapes importantes, il a tout d'abord fallu parvenir à une bonne estimation de la portance puis de la traînée, puis travailler à la réduction de la traînée en régime de croisière par des dispositifs *ad hoc* (carénages, nervures, actuateurs...), notamment à l'aide de processus d'optimisation de forme, et jusqu'à l'optimisation pluridisciplinaire des nouveaux avions.

Au début des années 1970, quand les capacités de calcul étaient fort réduites, l'essentiel du traitement était basé sur des méthodes surfaciques de type linéaire potentiel et restreint à des géométries très simplifiées. D'importants développements de ces méthodes potentielles (simulations volumiques, couplage avec un calcul de couche limite), rendus possibles par l'apparition de puissants calculateurs dans la deuxième partie de cette décennie, ont permis la prise en compte progressive d'une plus grande complexité à la fois de la géométrie des configurations simulées et de la physique de l'écoulement, allant jusqu'à la simulation d'avions complets au tout début des années 1980. Mais, dans le même temps, ce développement des capacités de calcul associé à d'importants progrès des méthodes numériques (schémas de capture de chocs, algorithmes multigrilles pour l'accélération de convergence...) a permis de progressivement prendre en compte la nature non linéaire des équations (d'Euler !) dans les simulations numériques. Ces méthodes, couplées à une prise en compte des couches limites et appliquées à des configurations d'avions complets de type *Boeing 747* ou *Airbus 320*, ont ainsi permis, dès la fin des années 1980, de traiter « en Euler » et de façon raisonnablement précise le domaine de vol transsonique, qui caractérise le régime de croisière de ces avions commerciaux.

Mais c'est essentiellement pour les points de vol en dehors du régime de croisière (descente d'urgence, panne...) et, surtout, pour le domaine de vol subsonique à grande portance, dans les phases critiques de décollage et d'atterrissage où les divers dispositifs hypersustentateurs sont déployés (becs, volets...) que les équations de Navier-Stokes moyennées (voir ci-dessus) doivent être utilisées. Il a donc fallu attendre que les capacités de calcul connaissent de nouvelles améliorations pour que, vers la fin des années 1990, il

Exemple de cartographie du coefficient de pression sur un quadrimoteur complet, calculé avec les équations de Navier-Stokes en régime turbulent.



devienne possible de les utiliser pleinement. Elles le sont maintenant, et la conception aérodynamique de nouveaux avions, comme l'*Airbus 380* ou le *Boeing 7E7*, s'appuie désormais sur l'utilisation intensive de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes autour des configurations géométriques détaillées de ces avions.

Les écoulements géophysiques

L'air et l'eau sont deux fluides qui obéissent aux équations de Navier-Stokes, équations qui sont donc respectivement à la base de la météorologie et de l'océanographie. Si, dans l'atmosphère et dans l'océan dits « libres », c'est-à-dire essentiellement au-dessus de la couche limite planétaire pour l'atmosphère et en dehors des couches limites superficielle et benthique pour l'océan, il est possible en première approximation, et comme en aérodynamique, de négliger les phénomènes visqueux et donc de travailler « en Euler », il est de nombreuses zones, en particulier ces couches limites, où les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles sont d'utilisation incontournable, le plus souvent via le formalisme Rans. Il n'est pas possible ici de détailler la façon dont ces équations trouvent leur utilisation dans ces milieux, mais on a déjà évoqué plus haut (voir ci-dessus « Chaos, turbulence, prévisibilité ») quelques éléments relatifs à la turbulence et à la prévisibilité, phénomènes centraux pour l'étude de ces milieux.

Les échelles spatiales occupées par les écoulements géophysiques, conjuguées au fait que ceux-ci se déploient sur une sphère terrestre en rotation, font que l'atmosphère et l'océan libres peuvent faire l'objet d'approches simplifiées : à une échelle de description suffisamment grande, il est possible de considérer que l'écoulement est en équilibre hydrostatique et qu'il devient quasi bidimensionnel (les mouvements selon la verticale sont alors d'amplitude très inférieure aux mouvements selon l'horizontale).

L'utilisation de l'approximation hydrostatique permet de réduire le problème à un système formellement incompressible, que les météorologues ont baptisé il y a environ cinquante ans du nom d'« équations primitives ». Bien que

disposant encore de très peu de résultats relativement à l'existence, l'unicité et la régularité des équations de Navier-Stokes (voir ci-dessus), il est intéressant de noter que J.-L. Lions, R. Temam et L. S. Wang ont montré en 1993 l'existence et l'unicité des solutions dans le cas du système couplé océan-atmosphère régi par les équations de Navier-Stokes « primitives », à la condition que les échanges de quantité de mouvement entre l'atmosphère et l'océan soient correctement pris en compte, via la différence entre la vitesse du vent et celle du courant marin à l'interface air-mer. Si ce terme n'est pas correctement traité, par exemple en négligeant à l'interface la vitesse du courant marin par rapport à celle du vent, le problème devient alors mal posé.

L'utilisation de l'approximation bidimensionnelle (qualifiée plus précisément en géophysique d'approximation géostrophique, car s'établit alors un équilibre entre la pression et l'accélération de Coriolis) induit une propriété tout à fait spécifique, celle de la conservation du tourbillon. Comme la dissipation visqueuse d'énergie est égale au produit du coefficient de viscosité par le carré du tourbillon, la conservation de celui-ci implique que la dissipation visqueuse d'énergie d'un fluide en écoulement bidimensionnel tend vers zéro pour des viscosités tendant vers zéro, au contraire du cas tridimensionnel.

En guise de conclusion

L'étude des écoulements géophysiques de grande échelle ramène ainsi à la connaissance des comportements les plus intimes des équations de Navier-

Stokes et aux limitations qui affectent encore les résultats relatifs à leurs solutions mathématiques. Plus généralement, ces interrogations mathématiques ont conduit la fondation Clay à intégrer les équations de Navier-Stokes dans les sept problèmes mathématiques « du millénaire », proclamés tels en 2000, lors de l'année mondiale des mathématiques... et dont la solution rapporterait un million de dollars à leurs auteurs !

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier l'équipe de documentation de Météo-France, particulièrement Nadine Cénac, Jean-Pierre Javelle et Xavier Popineau, l'équipe de la bibliothèque de l'École nationale des ponts et chaussées, particulièrement Catherine Masteau, et leurs collègues Steeve Champagnoux, Guilhem Chevalier, Uriel Frisch et Thilo Schonfeld.