

Laser DFB con accoppiamento puro d'indice: progetto della guida d'onda

Le guide d'onda tipicamente utilizzate in applicazioni laser sono quelle che abbinano un buon confinamento del modo ottico con un altrettanto buon confinamento degli elettroni nello strato attivo, “core” della guida d'onda.

Di conseguenza, le strutture più comunemente usate sono guide ad eterostruttura sepolta e guide RIB, e, nei dispositivi più avanzati, strutture da esse derivate.

L'applicazione specifica dei laser DFB in sistemi di comunicazione in fibra ottica a $1.55 \mu\text{m}$ (in III^a finestra) impone l'adozione di una lega quaternaria in $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ come *mezzo attivo*. Questo materiale può essere accresciuto per epitassia su di un *substrato* in InP, mezzo con indice di rifrazione $n_{sub} = 3.17$ a $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$. In particolare, per consentire adattamento reticolare tra $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ e InP nel processo di crescita, le frazioni molari di As e Ga, x e y , devono soddisfare la relazione:

$$x = 0.47y$$

La relazione empirica - valida per $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ - tra l'energia di band-gap, E_g (in eV), espressa come funzione del tasso y , e la lunghezza d'onda della radiazione, λ (in μm), è data da:

$$E_g = 0.12y^2 - 0.72y + 1.35 = 1.2395/\lambda$$

da cui si ricavano $y = 0.9$ ed $E_g = 0.8 \text{ eV}$ per $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.

Il mezzo attivo-core in lega quaternaria, con adattamento reticolare al substrato in InP, è, dunque, così dimensionato: $\text{In}_{0.58}\text{Ga}_{0.42}\text{As}_{0.9}\text{P}_{0.1}$.

Questo mezzo presenta, a $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, un indice di rifrazione pari a $n_{core} = 3.553$.

Il mezzo ricoprente, *cladding*, sarà costituito anch'esso da lega quaternaria, ma con una diversa composizione. In particolare, si desidera, rispetto al core, energia di band-gap maggiore (per agire da barriera ottica) ed indice di rifrazione minore (per

consentire modi guidati nel core).

Per $y = 0.6$ si hanno $E_g = 0.96$ eV ed indice di rifrazione $n_{clad} = 3.405$, corrispondenti ad una lunghezza d'onda d'emissione pari a $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$. Dunque, la lega $\text{In}_{0.72}\text{Ga}_{0.28}\text{As}_{0.6}\text{P}_{0.4}$ soddisfa le specifiche richieste, e costituendo il mezzo attivo dei laser in II^a finestra, c'è ampia disponibilità in letteratura di misure e stime di parametri fisici d'interesse, come mostrato in tab. 1:

$\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ at $\lambda = 1.30 \mu\text{m}$ with $y = 0.61$, $x = 0.28$ at $T = 300$ K

$$\tau = 10 \text{ ns}$$

$$B = 1.2 \times 10^{-10} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$C = 1.5 \times 10^{-29} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$$

$\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ at $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ with $y = 0.90$, $x = 0.42$ at $T = 300$ K

$$\tau = 4 \text{ ns}$$

$$B = 1.0 \times 10^{-10} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$C = 3.0 \times 10^{-29} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$$

Tab. 1: Parametri fisici dei modelli d'interesse per lo strato attivo e per il cladding: tempo di vita dei fotoni, coefficiente di emissione spontanea radiativa e costante di ricombinazione di Auger (fonte: "Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters", Ghafouri-Shiraz).

L'ausilio della suite COMSOL Multiphysics, un ambiente interattivo per la modellazione e la soluzione di problemi fisici basati su equazioni differenziali alle derivate parziali, ha consentito di effettuare una veloce simulazione delle prestazioni della guida d'onda per il laser DFB in esame. Sono stati sviluppati 2 modelli di guida, una rib ed una ad eterostruttura sepolta, con caratteristiche di guidaggio e confinamento molto simili.

Sviluppando un modello 2D delle guide, relativo alle loro sezioni trasversali, ed utilizzando il Modulo RF della suite, relativo all'analisi della propagazione di onde ibride perpendicolari, è stato possibile valutarne le caratteristiche di propagazione in termini di indice di rifrazione efficace e di confinamento ottico.

Il solutore del COMSOL utilizza il metodo degli elementi finiti.

I parametri della modalità d'analisi utilizzata ed i valori dei parametri fisici delle guide sono elencati nelle tab. 2-3.

Parametro	Valore
Elemento di default	Vettore, Lagrange - Quadratico
Tipo di analisi	Mode analysis
Tipo di campo	Onde di tipo ibrido
Specifica l'onda con	Lunghezza d'onda sullo spazio libero
Risolvi	Campo elettrico
Componenti del campo	Componenti nel piano
Specifica gli autovalori con	Indice sui modi efficaci
Condizioni di vincolo Weak	Non attivo
Tipo di vincolo	Ideale

Tab. 2: Parametri della modalità d'analisi (per simulazione COMSOL)

Parametro	Valore
n_{core}	3,553
n_{clad}	3,405
n_{ossido}	1,444
n_{sub}	3,17
n_{air}	1

Tab. 3: Indici di rifrazione dei mezzi (per simulazione COMSOL)

Le dimensioni geometriche della sezione delle guide sono le massime stimate, per garantire mono-modalità al dispositivo. Queste sono state ottenute, fissando inizialmente la larghezza della regione attiva a 2 μm (per consentire adattamento con fibre ottiche standard) e larghezza ed altezza del substrato, rispettivamente, a 10 μm e 4.5 μm ; in seguito, ottimizzando i valori degli spessori, si è ricercato il set di valori che garantisse insieme mono-modalità ed il più alto fattore di confinamento ottico. La regione attiva presenta le stesse dimensioni in entrambe le guide progettate.

I valori scelti per le dimensioni geometriche delle guide sono mostrati in tab. 4, mentre nelle figg. 1-2 ne sono rappresentate le sezioni trasversali.

Parametro	Valore (guida rib)	Valore (guida BH)
altezza - core	100 nm	100 nm
larghezza - core	2 μm	2 μm
altezza - ossido	250 nm	250 nm
altezza - cladding	200 nm	150 nm
altezza - substrato	4.55 μm	4.6 μm

Tab. 4: Parametri geometrici della sezione delle guide d'onda

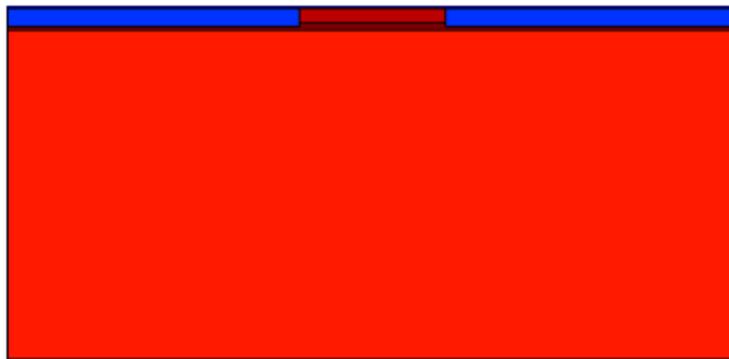


Fig. 1: Sezione trasversale della guida rib

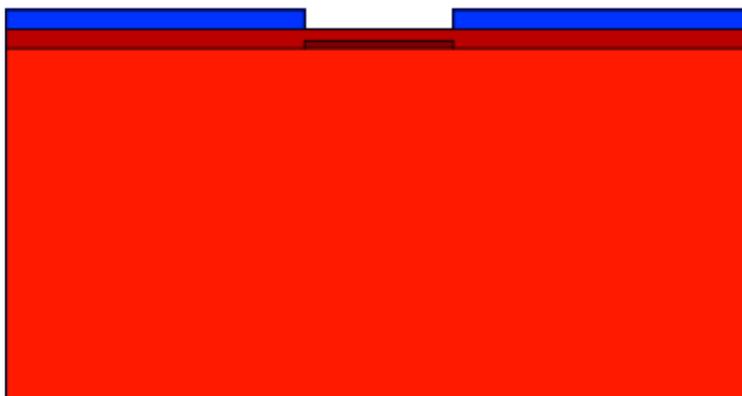


Fig. 2: Sezione trasversale della guida ad etero-struttura sepolta ("guida BH")

I profili del modo guidato sono mostrati nelle fig. 3-4:

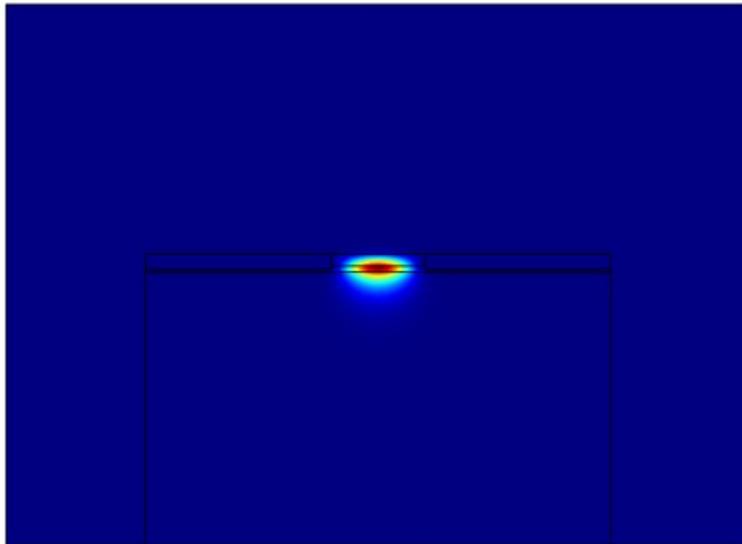


Fig. 3: Distribuzione di potenza ottica del modo fondamentale nella guida rib (unità normalizzate – immagine esportata da COMSOL)

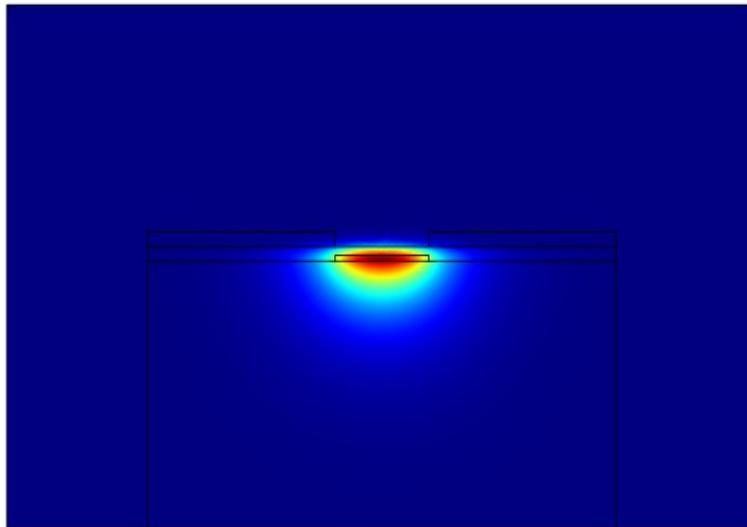


Fig. 4: Distribuzione di potenza ottica del modo fondamentale nella guida BH (unità normalizzate – immagine esportata da COMSOL)

I valori di indice di rifrazione efficace e di fattore di confinamento ottico (stimato mediante il tool di Integrazione sui sotto-domini del COMSOL) sono riportati in tab. 5:

Parametro	Valore (guida rib)	Valore (guida BH)
n_{eff}	3,1857	3,2019
Γ_{core}	0,24	0,17
Γ_{clad}	0,26	0,17

Tab. 5: Caratteristiche del modo fondamentale per le 2 guide: n_{eff} , parte reale dell'indice di rifrazione efficace, Γ_{core} e Γ_{clad} , fattori di confinamento nella regione attiva e nel cladding (valori calcolati da COMSOL)

Laser DFB con accoppiamento puro d'indice: progetto del reticolo

Il progetto del reticolo ne prevede la definizione del tipo, della forma, della profondità e del periodo (cfr. Appendici A3-A4).

Il reticolo ideato per questo tipo di applicazione è un *reticolo d'indice*, realizzato mediante opportuna corrugazione dello strato di cladding, e ricrescita di materiale con composizione differente negli scavi effettuati. La composizione del nuovo mezzo, e, dunque, il valore del *salto d'indice* del reticolo, dipendono dal valore del coefficiente d'accoppiamento scelto (cfr. Appendice A4).

Il *periodo* del reticolo, Λ , è fissato dal valore dell'indice di rifrazione efficace e dal valore dell'ordine della diffrazione di Bragg (cfr. Appendice A1); in questa applicazione si sceglie un reticolo del I° ordine non avendo particolari richieste specifiche a riguardo.

Di conseguenza, essendo $\Lambda = \frac{\lambda_0}{2n_{eff}}$, i valori del periodo del reticolo calcolati sono quelli mostrati in tab. 6, valutati per entrambe le guide:

Parametro	Valore (guida rib)	Valore (guida BH)
Λ	243 nm	242 nm

Tab. 6: Periodo del reticolo

La *forma* del reticolo ad onda quadra, è stata preferita poiché lo spessore dello strato di cladding che ospita il reticolo è di 200-150 nm nelle guide disegnate, e tali valori

dello spessore dello strato permettono di praticarvi, con processi di etching standard, scavi perfettamente verticali di profondità tipiche di 100 nm^[1].

In definitiva, per un reticolo d'indice del I° ordine ad onda quadra con *duty cycle* del 50%, come quello proposto, il coefficiente d'accoppiamento può essere espresso come segue:

$$\kappa = \frac{k_0^2}{2\pi\beta} (n_u^2 - n_p^2) \Gamma_{grating}$$

dove $k_0 = \omega_0/c$ è la costante di propagazione di Bragg, $\beta = n_{eff} k_0$ è la costante di propagazione, n_u è l'indice di rifrazione del mezzo “unperturbed”, ovvero quello del cladding (pari a 3.405), n_p è l'indice di rifrazione del mezzo “perturbed”, da accrescere negli scavi, mentre $\Gamma_{grating}$ è il fattore di confinamento ottico nello strato del reticolo (approssimativamente pari a Γ_{clad} – nota: questa espressione del coefficiente dell'accoppiamento è valida solo nel caso di reticolo ad onda quadra con *duty cycle* del 50%).

Imponendo un valore unitario del coefficiente d'accoppiamento normalizzato (rispetto alla lunghezza del dispositivo, L) al fine di attenuare effetti secondari indesiderati, ed, in primo luogo, lo *Spatial Hole Burning*, si ottengono i seguenti valori:

$$\kappa L \simeq 1 \quad \rightarrow \quad n_p = 3.402 \text{ (guida rib)}, \quad n_p = 3.400 \text{ (guida BH)}$$

Si osserva, inoltre, nella guida rib una maggiore sensibilità del coefficiente d'accoppiamento rispetto al salto d'indice del reticolo, come mostrato in fig. 5.

Risultano definiti così anche l'indice di rifrazione, e, dunque, la composizione, del

mezzo da accrescere all'interno degli scavi del reticolo.

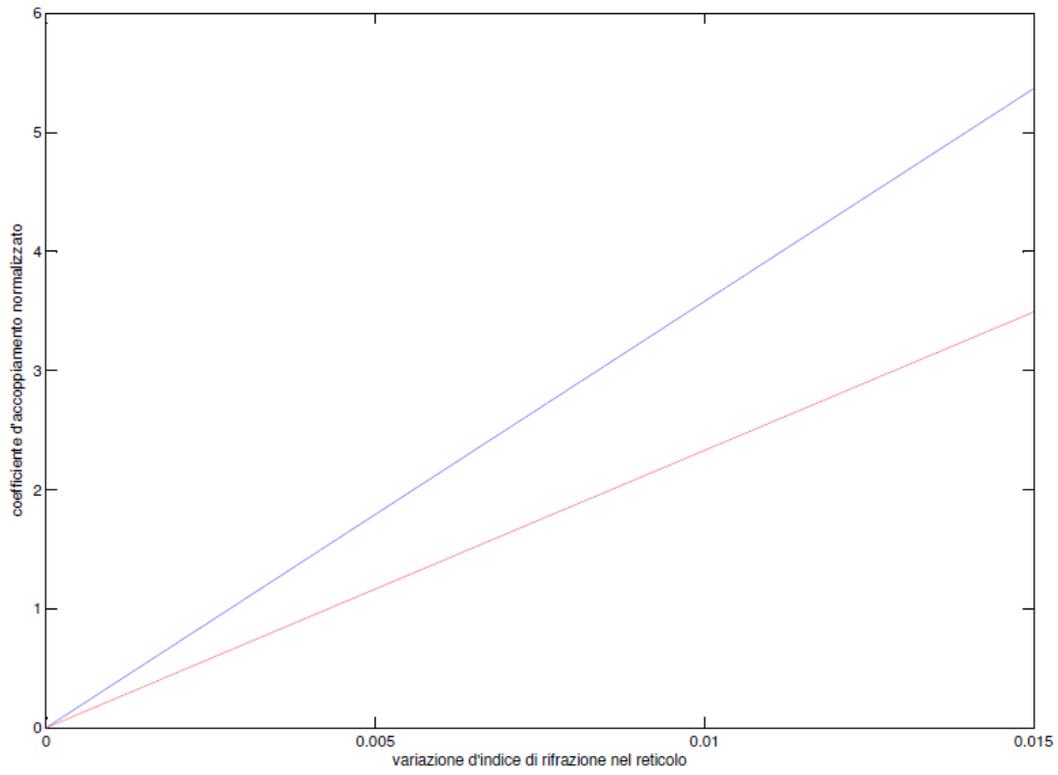


Fig. 5: Coefficiente d'accoppiamento normalizzato in funzione del salto d'indice del reticolo per la guida RIB (in blue) e per la guida BH (in rosso)

Laser DFB con accoppiamento puro d'indice: dispositivo con estremità cleaved

Si considera il progetto di un dispositivo avente riflettori esterni alle facce estreme, "facets", realizzati mediante *cleaving* lungo uno degli assi cristallografici principali del wafer. Il valore della fase alle estremità del reticolo è determinante, in questo caso, per le caratteristiche di soglia: è molto importante un accurato controllo della fase per ottenere la distribuzione modale desiderata. La discontinuità all'interfaccia tra la guida e l'aria ($n_{air}=1$) determina, inoltre, la dipendenza del modulo delle riflettività dal valore dell'indice di rifrazione medio del cladding, sede del reticolo:

$$r_{10}=r_{20}=\frac{(n_{clad}-1)}{(n_{clad}+1)}$$

L'equazione di soglia nella forma più generale si presenta dunque come segue:

$$(\gamma L)^2 D + (\kappa L)^2 \sinh^2(\gamma L)(1-r_L^2)(1-r_R^2) + 2i\kappa L(r_L+r_R)^2(1-r_L r_R)\gamma L \sinh(\gamma L) \cosh(\gamma L) = 0$$

dove $r_L=r_{L0}e^{-i\beta_0 L}e^{i\Omega_L}$ ed $r_R=r_{R0}e^{-i\beta_0 L}e^{-i\Omega_R}$ sono le riflettività d'ampiezza complesse

delle due facets, r_{L0} e r_{R0} i moduli delle riflettività definiti sopra, Ω_L e Ω_R le

corrispondenti fasi del reticolo, κ il coefficiente d'accoppiamento, L la lunghezza del

dispositivo, $\beta_0=\frac{\pi}{\Lambda}$ la costante di propagazione di Bragg, Λ il periodo del reticolo,

mentre la quantità D è definita come $D=(1+r_L r_R)^2 - 4r_L r_R \cosh^2(\gamma L)$.

La variabile indipendente dell'equazione è γ , costante di propagazione complessa.

I valori assunti per i parametri ai fini dell'analisi numerica sono riportati in tab. 7,

mentre in fig.6 sono mostrate 8 soluzioni, valutate per i medesimi valori.

Parametro	Valore
n_{clad}	3,405
r_{L0}	0,546
r_{R0}	0,546
Ω_L	π [rad]
Ω_R	π [rad]
Λ	243 [nm]
L	1 [mm]
κ	1 [mm ⁻¹]

Tab. 7: Valori dei parametri assunti per la soluzione numerica dell'equazione di soglia (laser DFB con cleaved-facets)

La tecnica numerica di Newton-Raphson consente di calcolare le soluzioni dell'equazione con l'accuratezza desiderata, assunta pari a 10^{-5} .

Per consentire una comoda applicazione del metodo^[8], si pone l'equazione nella forma $W(\gamma L) = U(\gamma L) + iV(\gamma L) = 0$, con U e V rispettivamente parti reale ed immaginaria della funzione analitica $W(\gamma L)$, normalizzando la variabile indipendente rispetto alla lunghezza del dispositivo: $\gamma L = x + iy$.

Dunque, si richiede la soluzione del sistema:
$$\begin{cases} U(x, y) = 0 \\ V(x, y) = 0 \end{cases}$$

Si denota con (x_r, y_r) la soluzione desiderata del sistema.

Effettuando uno sviluppo in serie di Taylor di $U(x, y)$ e $V(x, y)$ troncato al I° ordine intorno alla soluzione desiderata, si ricavano le seguenti:

$$U(x_r, y_r) = U(x, y) + \frac{dU}{dx}(x_r - x) + \frac{dU}{dy}(y_r - y) = 0$$

$$V(x_r, y_r) = V(x, y) + \frac{dV}{dx}(x_r - x) + \frac{dV}{dy}(y_r - y) = 0$$

Risolviendo il sistema per (x_r, y_r) , si ricava:

$$x_r = x + \frac{V(x, y) \frac{dU}{dy} - U(x, y) \frac{dV}{dy}}{det} = x + \Delta_x$$

$$y_r = y + \frac{U(x, y) \frac{dV}{dx} - V(x, y) \frac{dU}{dx}}{det} = y + \Delta_y$$

dove $det = \frac{dU}{dx} \frac{dV}{dy} - \frac{dU}{dy} \frac{dV}{dx} = \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dx}\right)^2$ (l'ultima identità è valida per l'ipotesi di analiticità fatta sulla funzione $W(\gamma L)$).

E' necessario esplicitare la derivata della funzione $W(\gamma L)$: $\frac{dW}{d(\gamma L)} = \frac{dU}{dx} + i \frac{dV}{dx}$.

L'espressione della derivata è, dunque, ricavata come segue (si è posto $r^2 = r_L r_R$):

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d(\gamma L)} = & 2\gamma L D - 8(\gamma L)^2 r^2 \sinh(\gamma L) \cosh(\gamma L) \\ & + 2(\kappa L)^2 (1 - r_L^2)(1 - r_R^2) \sinh(\gamma L) \cosh(\gamma L) \\ & + 2i\kappa L (r_L + r_R)(1 - r^2) [\cosh(\gamma L) \sinh(\gamma L) + \gamma L \sinh(\gamma L)^2 + \gamma L \cosh(\gamma L)^2] \end{aligned}$$

Lo script Matlab sviluppato per l'applicazione del metodo realizza essenzialmente, quindi, i seguenti passi:

1. assegna un valore alla variabile indipendente $\gamma L = x + iy$
2. valuta le quantità $W(\gamma L)$, $dW/d(\gamma L)$, det , Δ_x , Δ_y per $\gamma L = x + iy$
3. confronta le quantità Δ_x e Δ_y con l'accuratezza desiderata
4. se una eccede l'accuratezza, aggiorna le variabili come segue e ritorna al passo 2

$$x = x + \Delta_x \quad y = y + \Delta_y$$

5. salva la coppia corrente (x, y) e termina

Quando, all' n-simo passo di iterazione, le soluzioni soddisfano l'equazione con il

grado di accuratezza richiesto, l'algoritmo termina e la coppia (x^n, y^n) rappresenta la radice ricercata dell'equazione.

In fig. 6 sono riportate le soluzioni dell'equazione in termini di α_s , guadagno di soglia, e δ , coefficiente di detuning, per un valore della fase ad entrambe l'estremità del reticolo pari a π [rad] ed un coefficiente d'accoppiamento normalizzato unitario. Le quantità sono tutte normalizzate rispetto ad L , lunghezza del dispositivo.

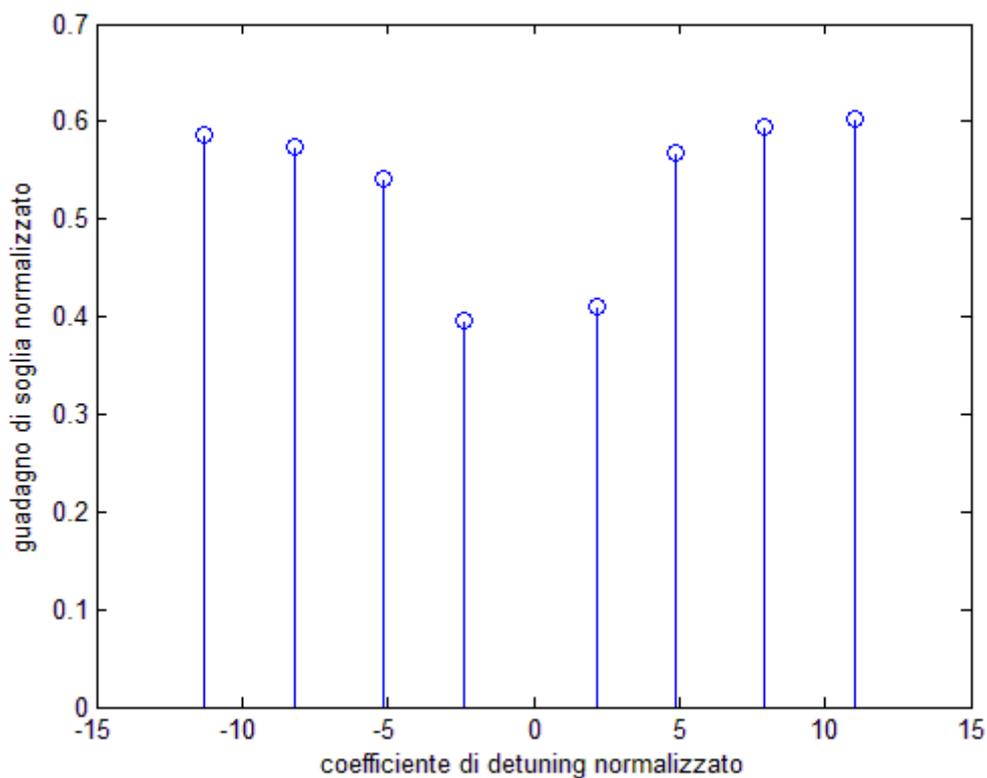


Fig. 6: Soluzioni dell'equazione di soglia per DFB con cleaved facets, con $\Omega_L = \Omega_R = \pi$, primi 8 modi (quantità normalizzate rispetto ad L)

In tab. 8 sono mostrati i valori di alcuni parametri d'interesse ottenuti: si può osservare una sostanziale indipendenza delle soluzioni dal tipo di guida.

Indice di rifrazione efficace	Guadagno di soglia normalizzato (modo laser)	Detuning normalizzato (modo laser)	Margine di guadagno [dB]	Numero di iterazioni dell'algoritmo
3,2019 (guida BH)	0,395	-2,375	-36,19	8
3,1857 (guida rib)	0,395	-2,375	-36,19	8

Tab. 8: Alcuni parametri d'interesse: guadagno di soglia e detuning del modo laser, margine di guadagno, numero di iterazioni dell'algoritmo

Il margine di guadagno di questa struttura è inadeguato: in letteratura^[1] è documentato un esperimento su di una fibra dispersiva a singolo modo, secondo cui un margine di guadagno di $\Delta\alpha = 5 \text{ cm}^{-1}$ è necessario per garantire l'opportuna reiezione del modo laterale ed un BER $< 10^{-9}$ in un sistema di trasmissione dati a 2.4 Gbit/s.

E' stata, dunque, investigata la possibilità di aumentare il margine di guadagno modificando una delle fasi alle estremità e mantenendo l'altra costante pari a π [rad].

I risultati ottenuti sono messi a confronto in fig.7 e tab. 9:

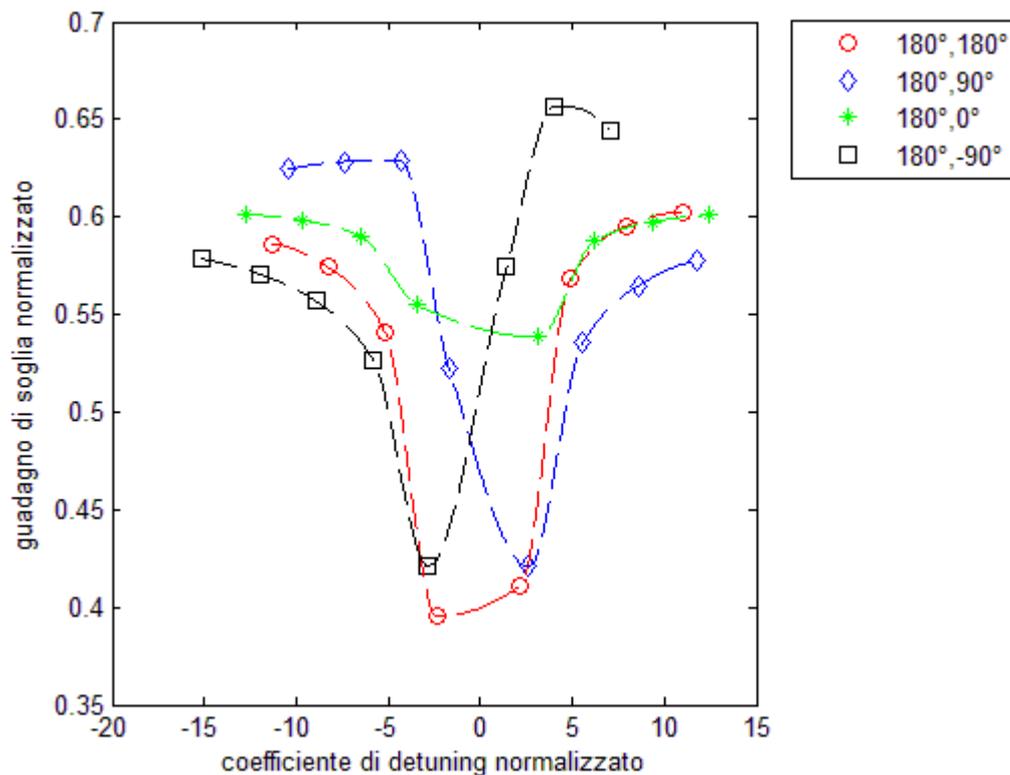


Fig. 7: Soluzioni dell'equazione di soglia, al variare della fase del reticolo alle estremità del dispositivo

Ω_L [rad]	Ω_R [rad]	$\alpha_s L$	δL	MG_{norm} [dB]	#iterazioni
π	π	0,395	-2,375	-36,19	8
π	$\pi/2$	0,421	2,630	-19,85	8
π	$-\pi/2$	0,421	-2,836	-19,53	8
π	0	0,539	3,148	-35,65	8

Tab. 9: Guadagno di soglia, margine di guadagno e numero di iterazioni dell' algoritmo, per il set in esame di valori delle fasi alle estremità

Si osserva un miglioramento per il margine di guadagno di quasi 17 dB nel caso con $\Omega_R = -\pi/2$ [rad]; ciò nonostante, dato che $L = 1$ mm, il margine di guadagno richiesto di 5 cm^{-1} , corrispondente ad un margine di guadagno normalizzato di -6.02 dB, è un valore non raggiunto da nessuno dei dispositivi qui proposti.

Un'altra geometria con le estremità cleaved, considerata per completezza, è quella con fasi $\Omega_L=0$ e $\Omega_R=90$. Questo dispositivo presenta un modo ad alto guadagno di soglia con detuning circa nullo, come si può apprezzare in fig. 8, dove ne sono rappresentate alcune soluzioni per un set di valori del coefficiente d'accoppiamento.

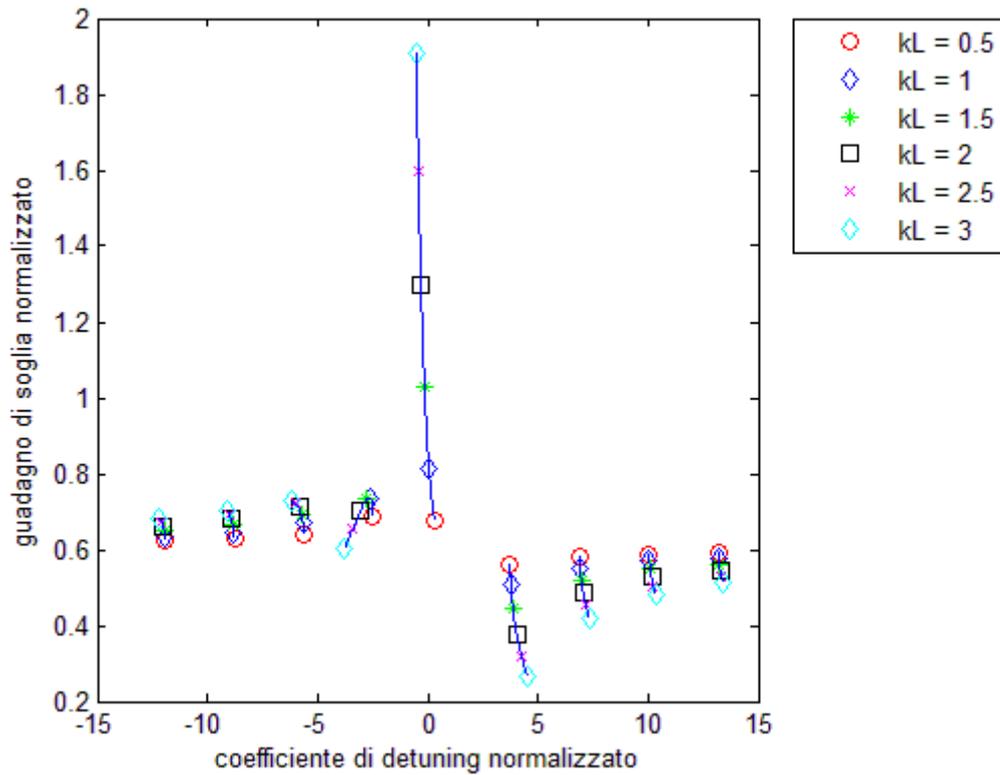


Fig. 8: Soluzioni dell'equazione di soglia, dispositivo con estremità cleaved, $\Omega_L = 0^\circ$ e $\Omega_R = 90^\circ$, per il set di kL in legenda

Anche questa geometria non possiede il margine di guadagno richiesto.

Laser DFB con accoppiamento puro d'indice: dispositivo con AR coatings

Si considera il progetto di un dispositivo con rivestimenti anti-riflettenti alle estremità (AR-coatings). L'equazione di soglia risulta semplificata in questo caso, poiché si impone riflettività nulla ad entrambe le facets del diodo laser^[7]:

$$(\gamma L)^2 + (\kappa L)^2 \sinh^2(\gamma L) = 0$$

Lo svantaggio di questo approccio è la comparsa della degenerazione modale: non si può parlare di mono-modalità a causa della presenza di un modo con detuning $+\delta$ ed uno con $-\delta$. Lo spettro di guadagno risulta simmetrico rispetto a $\delta = 0$.

In fig. 9 sono mostrate alcune soluzioni dell'equazione di soglia per un dato set di valori del coefficiente d'accoppiamento normalizzato, κL :

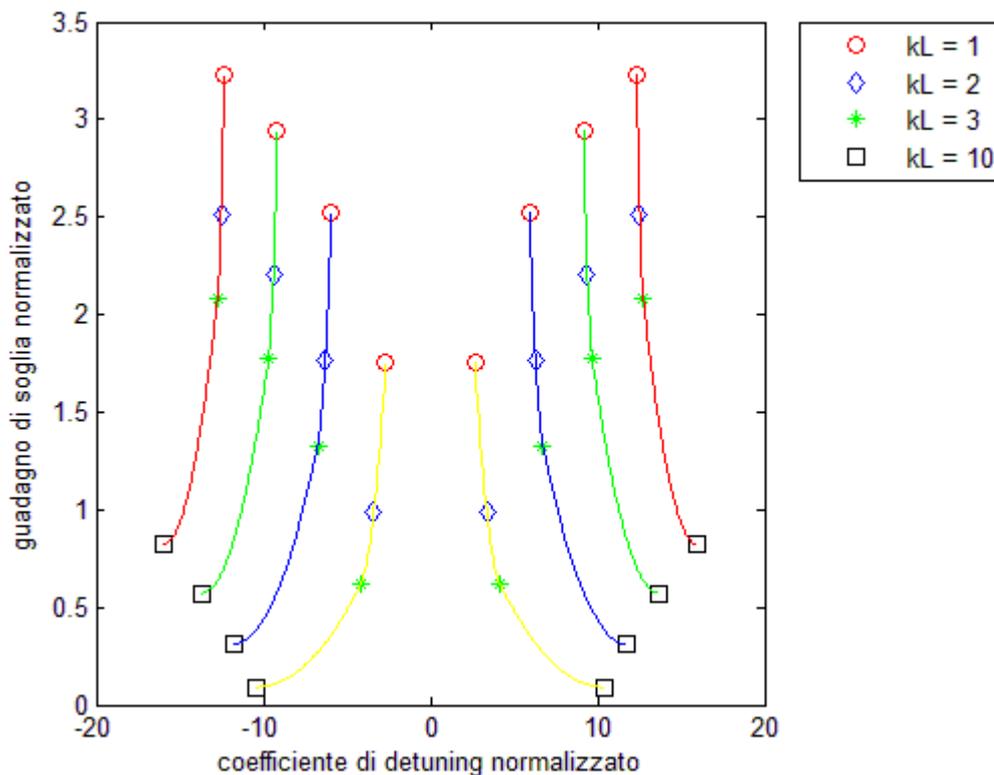


Fig. 9: Soluzioni dell'equazione di soglia (dispositivo con AR-coatings) per alcuni valori del coefficiente d'accoppiamento

In tab. 10 si riportano i valori di guadagno di soglia e detuning delle prime 4 coppie di modi del tipo $(\alpha_s, \pm\delta)$ ricavate come soluzioni dell'equazione: i valori di margine di guadagno indicati sono relativi alla differenza di guadagno tra la prima e la seconda coppia di modi.

κL	$\alpha_s L$	δL	MG_{norm} [dB]	#iterazioni
1	1,755	$\pm 2,666$	-2,28	5
2	0,985	$\pm 3,380$	-2,11	7
3	0,623	$\pm 4,149$	-3,03	8
10	0,091	$\pm 10,469$	-13,12	10

Tab. 10: Guadagno di soglia, margine di guadagno e numero di iterazioni dell' algoritmo, per un set di valori di κL

Si osservano valori del margine di guadagno “modificato” ben al di sopra di -6.02 dB (dunque validi per un sistema di trasmissione dati, come quello cui si fa riferimento nel paragrafo precedente) per un valore del coefficiente d'accoppiamento circa unitario, e, ciò nonostante, i dispositivi qui proposti non soddisfano la specifica di mono-modalità, poiché presentano degenerazione modale.

Laser DFB con accoppiamento puro d'indice: dispositivo con una estremità cleaved ed una con AR coating

Si considera il progetto di un dispositivo con una estremità cleaved e l'altra con AR coating. La fase dell'estremo cleaved è costante pari a $\pi/2$ [rad]. Sono state calcolate 8 soluzioni modali, al variare del coefficiente d'accoppiamento normalizzato tra 1 e 7, osservando un massimo del margine di guadagno, di valore pari a circa -8.5 dB, intorno a $\kappa L = 4$. Tale soluzione presenta, d'altronde, un detuning normalizzato piuttosto elevato, pari a circa -5 .

In fig. 10 e tab. 11 sono riportati i valori di guadagno di soglia e detuning calcolati per le soluzioni, al variare del coefficiente d'accoppiamento .

κL	$\alpha_s L$	δL	MG_{norm} [dB]	#iterazioni
1	0,978	1,548	-17,23	7
2	0,660	-3,624	-18,83	7
3	0,421	-4,29	-10,77	7
4	0,285	-5,05	-8,49	7
5	0,203	-5,88	-9,81	8
6	0,150	-6,76	-11,25	8
7	0,115	-7,66	-12,7	9

Tab. 11: Guadagno di soglia, margine di guadagno e numero di iterazioni dell' algoritmo, per un set di valori di κL

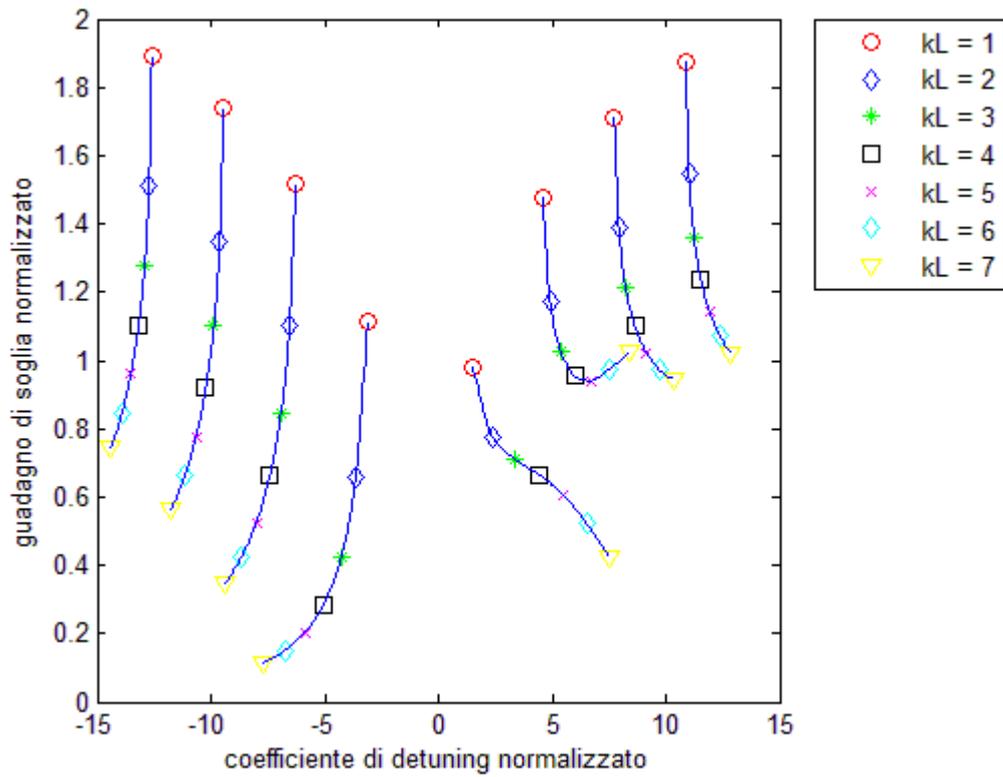


Fig. 10: Soluzioni dell'equazione di soglia (dispositivo con una estremità cleaved e l'altra con AR-coating) per alcuni valori del coefficiente d'accoppiamento

Laser DFB con accoppiamento puro d'indice: dispositivo con reticolo “λ/4-shifted”

Nei precedenti paragrafi, è stata analizzata la soglia per dispositivi DFB convenzionali con reticolo uniforme. Adesso, si considera, invece, il progetto di un laser DFB con uno shift di fase nel reticolo. In fig. 11, è mostrata una rappresentazione schematica di un *single-phase-shifted DFB laser*, in cui una variazione di fase pari a ϕ è realizzata all'origine dell'asse z (dimensione longitudinale del dispositivo). La cavità è così suddivisa in 2 sezioni, di lunghezza rispettivamente L_1 ed L_2 .

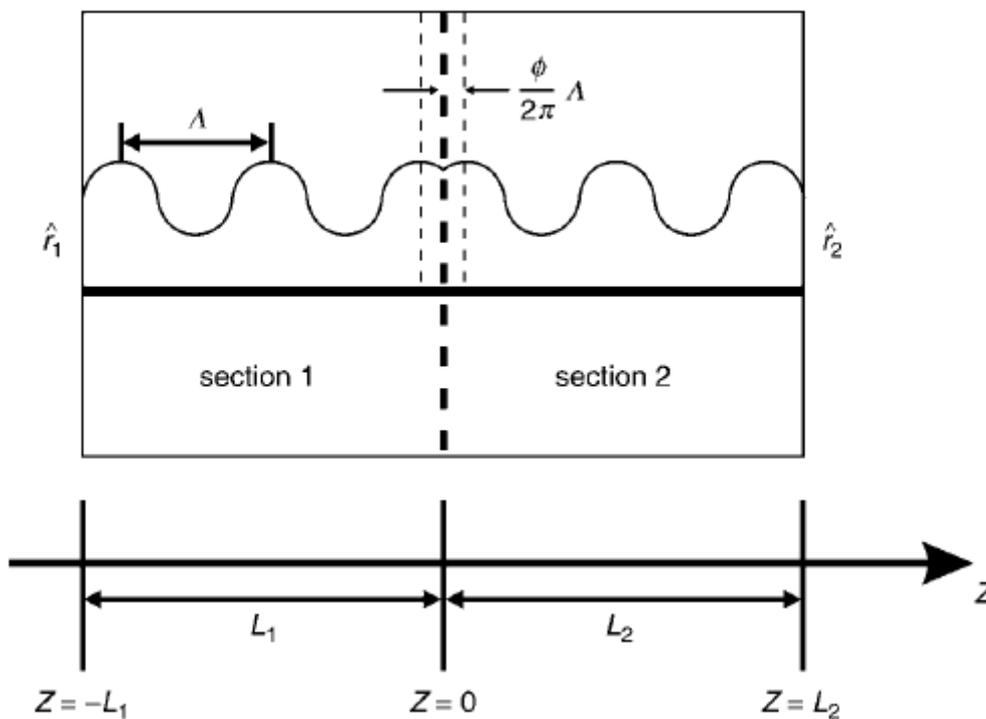


Fig. 11: Rappresentazione schematica di un *single-phase-shifted DFB laser*
(fonte: “Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters”, Ghafouri-Shiraz)

Gli indici di rifrazione di ciascuna sezione possono essere scritti come:

$$n^1(z) = n_0 + \Delta n \cos(2\beta_0 z + \phi)$$

$$n^2(z) = n_0 + \Delta n \cos(2\beta_0 z - \phi)$$

Le equazioni dei modi accoppiati vengono valutate in ciascuna sezione, assumendo uguali forme e profondità del reticolo, ovvero un coefficiente d'accoppiamento costante. L'equazione agli autovalori^[9] che risulta dall'aver imposto le opportune condizioni al contorno alle estremità del dispositivo è la seguente:

$$\frac{j\Psi^1 r_{L0} + \Theta^1}{j\Theta^1 r_{L0} + T^1} \cdot \frac{j\Psi^2 r_{R0} + \Theta^2}{j\Theta^2 r_{R0} + T^2} = -e^{j2\phi}$$

dove

$$\Psi^k = \hat{\Gamma}^2 + \kappa^2 e^{2\gamma L_k}$$

$$\Theta^k = \kappa \hat{\Gamma} (1 - e^{2\gamma L_k})$$

$$T^k = \kappa^2 + \hat{\Gamma}^2 e^{2\gamma L_k}$$

$$\hat{\Gamma} = \alpha - j\delta - \gamma$$

con $k = 1, 2$.

Le riflettività di campo complesse possono essere espresse come:

$$r_L = r_{L0} e^{-j(2\beta_0 L_1 - \phi)}$$

$$r_R = r_{R0} e^{-j(2\beta_0 L_2 + \phi)}$$

In letteratura^[1], per questo tipo di struttura, è indicato come non desiderabile l'uso di estremità con riflettività non nulla, poiché errori casuali per la fase della corrugazione alle estremità causerebbero gravi difficoltà nel controllo delle caratteristiche del laser. Di conseguenza, si è ritenuta valida l'applicazione di AR-coatings ad entrambe le facets. Inoltre, la posizione del reticolo è al centro della cavità con $L_1 = L_2 = L/2$.

E' nota la presenza di un minimo del guadagno di soglia per $\phi = \pi/2$ [rad], valore di shift assunto per il progetto.

Con le precedenti assunzioni, l'equazione di soglia diventa:

$$\left[\frac{\kappa \hat{\Gamma} (1 - e^{\gamma L})}{(\kappa^2 + \hat{\Gamma}^2 e^{\gamma L})} \right]^2 = e^{j\pi}$$

Per la risoluzione dell'equazione, si è applicato lo stesso metodo di Newton-Raphson, utilizzato per le precedenti geometrie proposte. Le uniche quantità che cambiano sono la funzione $W(\gamma L)$ e la sua derivata $dW/d(\gamma L)$, che si ripropongono qui di seguito. Si è posto $z = \gamma L = x + iy$, $\bar{\kappa} = \kappa L$:

$$W(z) = \bar{\kappa}^2 G^2 (1 - e^z)^2 + e^{j\pi} [\bar{\kappa}^4 + e^{2z} G^4 + 2 \bar{\kappa}^2 e^z G^2]$$

$$\frac{dW}{dz} = \bar{\kappa}^2 [H(1 - e^z)^2 + 2G^2(e^{2z} - e^z)] + e^{j\pi} \{ 2e^{2z} [G^4 + 2G^3(\frac{z}{\sqrt{(z^2 - \kappa^2)}} - 1)] + 2\bar{\kappa}^2 e^z [G^2 + H] \}$$

dove $G = \sqrt{(z^2 - \bar{\kappa}^2)}$ e $H = 4z - 2 \frac{(2z^2 - \bar{\kappa}^2)}{\sqrt{(z^2 - \bar{\kappa}^2)}}$.

In fig. 12 e tab. 12 sono mostrate alcune soluzioni dell'equazione, in termini di guadagno di soglia e detuning, come calcolati dallo script Matlab sviluppato appositamente. Sono evidenti le ottime prestazioni del dispositivo, che mostra emissione esattamente a $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, con margini di guadagno più che sufficienti per valori di κL fino a circa 5.

κL	$\alpha_s L$	δL	MG_{norm} [dB]	#iterazioni
1	1,527	0	-3,84	6
2	0,697	0	-2,70	7
3	0,328	0	-2,96	8
5	0,068	0	-5,08	12

Tab. 12: Guadagno di soglia, margine di guadagno e numero di iterazioni dell' algoritmo, per un set di valori di κL

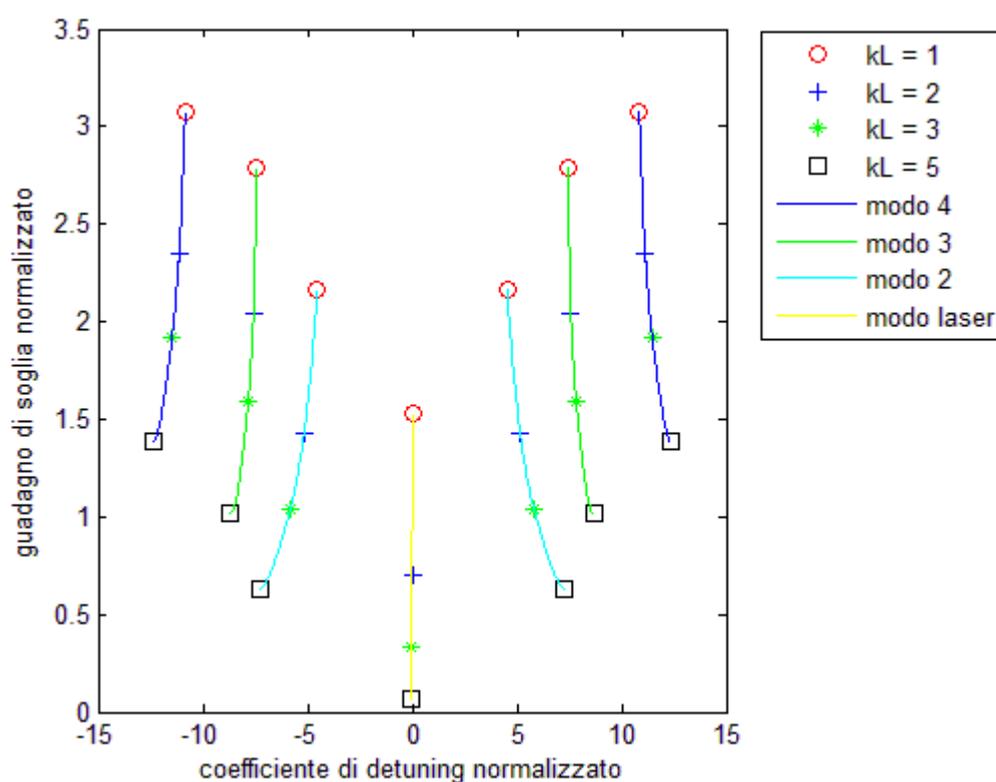


Fig. 12: Soluzioni dell'equazione di soglia (dispositivo $\lambda/4$ shifted) per alcuni valori del coefficiente d'accoppiamento

Si riporta, in chiusura di paragrafo, il codice Matlab che implementa un possibile solutore per l'equazione di soglia. In coda al codice sono indicate, sotto-forma di commento, le soluzioni iniziali adottate nei casi analizzati.

File “DFB.m”

```

clc
clear all
close all

k = 1e3; % coefficiente d'accoppiamento
L = 1e-3; % lunghezza del dispositivo
accuracy = 1e-5; % accuratezza del solutore
c = 3e8; % velocità della luce nel vuoto
n = 3.405; % indice di rifrazione medio del reticolo
neff = 3.2019; % parte reale dell'indice di rifrazione efficace
lambda0 = 1.55e-6; % lunghezza d'onda di lavoro
omega0 = 2*pi*c/lambda0; % frequenza angolare di Bragg --> 193.55 THz
beta0 = n*omega0/c; % costante di propagazione di Bragg
LAMBDA = lambda0/(2*neff); % periodo del reticolo
rho_L0 = (n - 1)/(n + 1); % riflettività di ampiezza LEFT (cleaved facet ==> (n - 1)/(n + 1), AR facet ==> 0, HR facet ==> 1)
rho_R0 = (n - 1)/(n + 1); % riflettività di ampiezza RIGHT (cleaved facet ==> (n - 1)/(n + 1), AR facet ==> 0, HR facet ==> 1)
OMEGA_L = pi; % fase del reticolo - estremo LEFT
OMEGA_R = pi; % fase del reticolo - estremo RIGHT
rho_L = rho_L0*exp(-i*beta0*L+i*OMEGA_L);
rho_R = rho_R0*exp(-i*beta0*L-i*OMEGA_R);
rho = rho_L*rho_R;

X = [ 0.5 -0.5 -0.5 0.5 0.5 -0.5 0.5 -0.5 ];
Y = [ -10 7 -5 2.5 -2.5 5 7 11 ];

for mode = 1: length(X)

    x = X(mode);
    y = Y(mode);
    iter(mode) = 0;
    gammaL(mode) = x+i*y;
    D = (1+rho)^2 - 4*rho * (cosh(gammaL(mode)))^2;

    W = (gammaL(mode))^2*D + (k*L)^2*(sinh(gammaL(mode)))^2*(1 - rho_L^2)*(1 - rho_R^2) +...
        2*i*k*L*(rho_L + rho_R)*(1 - rho)*gammaL(mode)*sinh(gammaL(mode))*cosh(gammaL(mode));

    U = real(W);
    V = imag(W);

    dW_dz = 2*gammaL(mode)*D - 8*(gammaL(mode))^2*rho*sinh(gammaL(mode))*cosh(gammaL(mode)) +...
        2*(k*L)^2*(1 - rho_L^2)*(1 - rho_R^2)*sinh(gammaL(mode))*cosh(gammaL(mode)) +...
        2*i*k*L*(rho_L + rho_R)*(1 - rho)*...
        (cosh(gammaL(mode))*sinh(gammaL(mode)) + gammaL(mode)*(sinh(gammaL(mode)))^2 + gammaL(mode)*(cosh(gammaL(mode)))^2 );

    dU_dx = real(dW_dz);
    dV_dx = imag(dW_dz);

    deter = (dU_dx)^2 + (dV_dx)^2 ;

    Dx = -(V*dV_dx + U*dU_dx)/deter ;
    Dy = (U*dV_dx - V*dU_dx)/deter ;

    while abs(U)>1e-12 || abs(V)>1e-12 || abs(Dx) > accuracy || abs(Dy) > accuracy

        iter(mode) = iter(mode) + 1;
        gammaL(mode) = x+i*y;
        D = (1+rho)^2 - 4*rho * (cosh(gammaL(mode)))^2;

        W = gammaL(mode)^2*D + (k*L)^2*(sinh(gammaL(mode)))^2*(1 - rho_L^2)*(1 - rho_R^2) +...
            2*i*k*L*(rho_L + rho_R)*(1 - rho)*gammaL(mode)*sinh(gammaL(mode))*cosh(gammaL(mode));

        U = real(W);
        V = imag(W);

        dW_dz = 2*gammaL(mode)*D - 8*gammaL(mode)^2*rho*sinh(gammaL(mode))*cosh(gammaL(mode)) +...
            2*(k*L)^2*(1 - rho_L^2)*(1 - rho_R^2)*sinh(gammaL(mode))*cosh(gammaL(mode)) +...
            2*i*k*L*(rho_L + rho_R)*(1 - rho)*...
            (cosh(gammaL(mode))*sinh(gammaL(mode)) + gammaL(mode)*(sinh(gammaL(mode)))^2 + gammaL(mode)*(cosh(gammaL(mode)))^2 );

        dU_dx = real(dW_dz);
        dV_dx = imag(dW_dz);

        deter = (dU_dx)^2 + (dV_dx)^2 ;

        Dx = -(V*dV_dx + U*dU_dx)/deter ;

        Dy = (U*dV_dx - V*dU_dx)/deter ;

        x = x + Dx;
        y = y + Dy;

        if iter(mode) > 50 % uscita forzata dal loop a causa della non convergenza dell'algoritmo
            break
        end
    end

end

gamma(mode) = gammaL(mode)/L;
alpha(mode) = real(sqrt(gamma(mode)^2 - k^2));
delta(mode) = -imag(sqrt(gamma(mode)^2 - k^2));

if abs(alpha(mode)) < accuracy % identificazione ed eliminazione di soluzioni spurie
    alpha(mode) = NaN;
    delta(mode) = NaN;
end

```

```

end

iter_mean = mean(iter);
iter_mean

stem(delta*L, alpha*L)
xlabel('coefficiente di detuning normalizzato')
ylabel('guadagno di soglia normalizzato')

[alpha_copy, index] = sort(alpha);
alpha_lasing = alpha_copy(1)*L
delta_lasing = delta(index(1))*L

if abs(alpha_copy(2) - alpha_copy(1)) < 1e-3
    alpha_copy(2) = NaN;
else
end
alpha_copy(1) = NaN;

[alpha_mode2, index2] = min(alpha_copy);
alpha_mode2 = alpha_mode2*L
delta_mode2 = delta(index2))*L

MG = 20*log10((abs(alpha_mode2 - alpha_lasing)))

% save 'data1.mat'  alpha  delta  k  L  MG

% CLEAVED + CLEAVED:
%
% 0, pi/2
%
% X = [ 0.5  0.5  0.5  -0.5  5  0.5  0.5  0.5  0.5 ];
% Y = [ 12  9  3  -6  0.5  -8  -4  -10  -13 ];
%
% pi, pi
%
% X = [ 0.5  -0.5  -0.5  0.5  0.5  -0.5  0.5  -0.5 ];
% Y = [ -10  7  -5  2.5  -2.5  5  7  11 ];
%
% pi, pi/2
%
% X = [ -0.5  -0.5  0.5  0.5  0.5  0.5  0.5  0.5  1 ];
% Y = [ 12  9  -6  -4  3  5  7  2  15 ];
%
% pi, 0
%
% X = [ 0.5  0.5  -0.5  0.5  0.5  -0.5  -0.5  -0.5 ];
% Y = [ 12  9  -6  3  -3  6  8  12 ];
%
% pi, -pi/2
%
% X = [ -0.5  -0.5  0.5  0.5  0.5  0.5  0.5  1 ];
% Y = [ 12  9  -6  -4  3  7  2  15 ];

% AR + AR:
%
% X = [ 3.5  3.2  2.9  2.5  1.8  1.8  2.5  2.9  3.2  3.5 ];
% Y = [ 15.5  12.3  9.1  5.8  2.5  -2.5  -5.8  -9.1  -12.3  -15.5 ];

% CLEAVED (pi) + AR
%
% X = [ -2  -1.7  -1.5  -1  -1  -1.5  -1.7  -2 ];
% Y = [ -12  -9  -5.5  -2.4  2.3  5.4  8.5  11.5 ];
%
% CLEAVED (pi/2) + AR
%
% X = [ -1.7  -1.5  -1  -0.5  -1.5  -1.7  -2  -2 ];
% Y = [ -9  -6  -3  -2.5  4.5  7.5  -12  11.5 ];

% CLEAVED (pi) + HR (pi e -pi/2)
%
% X = [ 0.5  -0.5  -0.3  0.2  0.2  -0.2  -0.5  0.5 ];
% Y = [ -10  8  -5  2.1  -2.0  4.5  -8  12 ];
%
% CLEAVED (pi) + HR (pi/2)
%
% X = [ 0.5  -0.5  -0.3  1  0.5  -0.2  1  -0.5  -0.5  0.5 ];
% Y = [ -10  8  -5  2.1  3.0  5.5  2  -7.5  -8.5  12 ];

% AR + HR (pi e pi/2)
%
% X = [ 0.5  1.2  -1.4  0.7  -0.7  1.2  1.2  1.7 ];
% Y = [ -10  5.5  -9  -2.5  -2.4  -5.5  -14  12 ];
%
% AR + HR (-pi/2)
%
% X = [ 0.5  1.2  -1.4  -0.7  0.7  1.2  1.5  1.5 ];
% Y = [ -10  5.5  -9  -2.4  -2.5  -5.5  -8  -10 ];

```

File “PSP_DFB.m”

```

clc
clear all
close all

k = 1e3; % coefficiente d'accoppiamento
L = 1e-3; % lunghezza del dispositivo
K = k*L; % coefficiente d'accoppiamento normalizzato a L
accuracy = 1e-5; % accuratezza del solutore
phi_ = pi/2;%*linspace(0, 2, 64); % vettore degli shift di fase del reticolo

% Soluzioni iniziali (normalizzati a L)
X = [ 3 3 2 -3 2 3 3];
Y = [-10 -7 -4 0.001 4 7 10];

% Preallocazioni
iter = NaN*ones(1,length(X)); % vettore del numero di iterazioni per modo
gamma = NaN*ones(1,length(X)); % vettore delle costanti di propagazione
alpha = NaN*ones(1,length(X)); % vettore dei guadagni di soglia
delta = NaN*ones(1,length(X)); % vettore delle frequenze modali
a = NaN*ones(1,length(phi_)); % vettore del guadagno di soglia del modo laser al variare dello shift di fase
b = NaN*ones(1,length(phi_)); % vettore delle frequenze del modo laser al variare dello shift di fase

% NOTA: length(X) è considerato il numero di modi da stimare

for P=1:length(phi_)
    phi = phi_(P);

    for mode=1:length(X)

        x = X(mode);
        y = Y(mode);
        iter(mode) = 0;

        z = x+i*y;
        G = sqrt(z^2 -K^2) - z;
        H = 4*z - 2*(2*z^2 - K^2)/sqrt(z^2 -K^2);

        WL = (K*G*(1 -exp(z)))^2;
        WR = exp(i*2*phi)*(K^4 + G^4*exp(2*z) + 2*(K*G)^2*exp(z));
        W = WL + WR; % funzione complessa di cui stimare le radici: W(z)= U(x,y) + i* V(x,y) = 0

        U = real(W);
        V = imag(W);

        dWL = K^2*(H*(1 -exp(z))^2 + 2*G^2*(exp(2*z) -exp(z)));
        dWR = 2*exp(i*2*phi)*( exp(2*z)*(G^4 + 2*G^3*(z/sqrt(z^2 -K^2) -1)) + K^2*exp(z)*(G^2 + H));
        dW_dz = dWL + dWR; % derivata di W(z)

        dU_dx = real(dW_dz);
        dV_dx = imag(dW_dz);

        deter = (dU_dx)^2 + (dV_dx)^2 ;
        Dx = -(V*dV_dx + U*dU_dx)/deter ;
        Dy = (U*dV_dx - V*dU_dx)/deter ;

        while abs(U)>1e-12 || abs(V)>1e-12 || abs(Dx) > accuracy || abs(Dy) > accuracy
            % while abs(Dx*dU_dx - Dy*dV_dx)>accuracy || abs(Dx*dV_dx + Dy*dU_dx)>accuracy

            iter(mode) = iter(mode) + 1 ;

            z = x+i*y;
            G = sqrt(z^2 -K^2) - z;
            H = 4*z - 2*(2*z^2 - K^2)/sqrt(z^2 -K^2);

            WL = (K*G*(1 -exp(z)))^2;
            WR = exp(i*2*phi)*(K^4 + G^4*exp(2*z) + 2*(K*G)^2*exp(z));
            W = WL + WR;

            U = real(W);
            V = imag(W);

            dWL = K^2*(H*(1 -exp(z))^2 + 2*G^2*(exp(2*z) -exp(z)));
            dWR = 2*exp(i*2*phi)*( exp(2*z)*(G^4 + 2*G^3*(z/sqrt(z^2 -K^2) -1)) + K^2*exp(z)*(G^2 + H));
            dW_dz = dWL + dWR;

            dU_dx = real(dW_dz);
            dV_dx = imag(dW_dz);

            deter = (dU_dx)^2 + (dV_dx)^2 ;
            Dx = -(V*dV_dx + U*dU_dx)/deter ;
            Dy = (U*dV_dx - V*dU_dx)/deter ;

            x = x + Dx;
            y = y + Dy;
        end
    end
end

```

```

        if iter > 50          % uscita forzata dal loop a causa della non convergenza dell'algoritmo
            break
        end

    end

    iter(mode)
    gamma(mode) = z/L;          % denormalizzazione della soluzione
    alpha(mode) = real(sqrt(gamma(mode)^2 - k^2));
    delta(mode) = -imag(sqrt(gamma(mode)^2 - k^2));

end

% ciclo di identificazione ed eliminazione delle soluzioni spurie
for t = 1:length(alpha)
    if abs(alpha(t)*L) < accuracy
        alpha(t) = NaN;
        delta(t) = NaN;
    end
end

figure(1)
stem(delta*L, alpha*L)
xlabel('frequenza normalizzata')
ylabel('guadagno di soglia normalizzato')
% axis([-10 10 0 5])
drawnow
% pause(1)

[a(P),t_min] = min(alpha);    % individuazione e salvataggio del guadagno del modo laser
b(P) = delta(t_min) ;       % salvataggio della frequenza del modo laser

end

%%
iter_mean = mean(iter);
iter_mean

alpha_copy = alpha;
[alpha_lasing, index] = min(alpha_copy);
alpha_lasing = alpha_lasing*L;
delta_lasing = abs(delta(index)*L)

alpha_copy(index) = NaN;
alpha_copy(index+1) = NaN;

[alpha_mode2, index2] = min(alpha_copy);
alpha_mode2 = alpha_mode2*L

    delta_mode2 = abs(delta(index2)*L)

alpha_copy(index2) = NaN;

    alpha_copy(index2+3) = NaN;

MG = 20*log10((abs(alpha_mode2) - alpha_lasing))

% save 'data1-PSP.mat' alpha delta k L MG

% kL >= 1
%
% X = [ 3 3 2 -3 2 3 3];
% Y = [-10 -7 -4 0.001 4 7 10];

% kL < 1
%
% X = [ 5 -4 4 2 4 -4 5];
% Y = [-10 7 -5 0.001 5 -7 10];

```

Laser DFB con accoppiamento puro d'indice: curva luce-corrente

Il sistema delle rate equations per un laser a semiconduttore in lega quaternaria, come quello proposto, può essere espresso dalle seguenti espressioni (cfr. Appendice A5):

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{qV} - \left(\frac{N}{\tau_n} + BN^2 + CN^3 \right) - A(N - N_0) \frac{S}{(1 + \epsilon S)}$$

$$\frac{dS}{dt} = A(N - N_0)S + \beta_{sp}BN^2 - \frac{S}{\tau_s}$$

dove N è la densità di portatori [m^{-3}], S è la densità di fotoni nel mezzo attivo [m^{-3}], τ_n è il tempo di vita della ricombinazione lineare [s], B è il coefficiente di ricombinazione molecolare [m^3s^{-1}], C è il coefficiente di ricombinazione di Auger [m^6s^{-1}], mentre la quantità A è data da $A = \Gamma v_g \alpha V$ con Γ fattore di confinamento ottico, $v_g = c/n_{eff}$ velocità di gruppo [m/s], α coefficiente di guadagno [m^{-1}] e V volume della regione attiva [m^3], ϵ è il coefficiente di compressione del guadagno [m^3], β_{sp} è il coefficiente di emissione spontanea, τ_s è il tempo di vita del fotone [s].

Si riportano in tab. 13 i valori assunti per i parametri ai fini dell'analisi numerica.

Si è posto $L = 1$ mm, come lunghezza del dispositivo. Sono riportati i valori dei parametri relativi al progetto del laser DFB con reticolo shiftato di $\lambda/4$, l'unico che soddisfa tutte le specifiche.

Nella soluzione delle rate equations si è approssimato il coefficiente di guadagno α con una costante di guadagno, ovvero si è ipotizzato che il guadagno non vari al variare della corrente di iniezione; ciò non è vero in generale, ma può essere una

approssimazione tollerabile per bassi valori della corrente.

Parametro	Valore	Unità di misura
τ_n	4	ns
τ_s	1	ps
B	10^{-16}	m^3s^{-1}
C	3×10^{-41}	m^6s^{-1}
Γ_{core} (rib - BH)	0,24 – 0,17	-
v_g (rib - BH)	$9,42 - 9,37 \times 10^7$	$m s^{-1}$
α	1,53	m^{-1}
V	$200 = (0.1 \times 2 \times 1000)$	μm^3
ϵ	$1,5 \times 10^{-23}$	m^3
β_{sp}	10^{-5}	-

Tab. 13: Parametri fisico-geometrici per la soluzione delle rate equations

Al fine di semplificare le espressioni fornite alla routine Matlab, che risolve il sistema di equazioni differenziali (*ode 15s* oppure *ode45*), si eseguono le seguenti normalizzazioni:

$$n = \frac{N}{N_0}, \quad T = \frac{t}{\tau_n}, \quad S_0 = \frac{1}{A\tau_n}, \quad s = \frac{S}{S_0}, \quad I_0 = \frac{N_0 q V}{\tau_n}, \quad \tau = \frac{\tau_n}{\tau_s}$$

Il sistema si trasforma, dunque, come segue:

$$\frac{dn}{dT} = \frac{I}{I_0} - n - (B\tau_n N_0)n^2 - (C\tau_n N_0^2)n^3 - (n-1) \frac{s}{(1+\epsilon S_0 s)}$$

$$\frac{ds}{dT} = \frac{N_0}{S_0}(n-1)s + \frac{\beta_{sp} B \tau_n N_0^2}{S_0} n^2 - \tau s$$

Dunque, le variabili indipendenti sono: $y(1)=n$ e $y(2)=s$, mentre i parametri sono: $p(1)=I_0$, $p(2)=B$, $p(3)=\tau_n$, $p(4)=N_0$, $p(5)=C$, $p(6)=\epsilon$,
 $p(7)=S_0$, $p(8)=\beta_{sp}$, $p(9)=\tau$.

Si riporta, di seguito, il codice della routine Matlab “*rate_equation.m*”, che risolve il sistema di equazioni differenziali, ed il codice dello script “*Light_Current.m*”, che ne fa uso per valutare la curva luce-corrente del dispositivo.

La routine riceve come argomenti: t variabile temporale, y vettore [2x1] che conterrà n ed s , p vettore dei 9 parametri sopra elencati, I corrente di iniezione.

```
function dy = rate_equation(t,y,p,I)
dy = zeros(2,1);

dy(1) = I/p(1) - p(2)*p(3)*p(4)*y(1)^2 - p(5)*p(3)*p(4)^2*y(1)^3 - (y(1) - 1)*y(2)/(1 - p(6)*p(7)*y(2));
dy(2) = p(4)/p(7)*(y(1) - 1)*y(2) + p(8)*p(2)*p(3)*p(4)^2/p(7)*y(1)^2 - p(9)*y(2);

clc
clear all
close all

%costanti
c = 3e8; % velocità della luce nel vuoto
h = 6.626e-34; % costante di Planck
q = 1.6e-19; % carica elementare

%parametri fisici (mezzo attivo: InGaAsP - y = 0.9, x = 0.47*y )
tau_n = 4e-9; % tempo di vita della ricombinazione radiativa lineare
tau_p = 1e-12; % tempo di vita del fotone
N0 = 1.5e24; % densità di portatori alla trasparenza
beta = 1e-5; % coefficiente di emissione spontanea
lambda0 = 1.55e-6; % lunghezza d'onda di Bragg
neff = 3.1857 % indice di rifrazione efficace (DA SIMULAZIONE COMSOL)
vg = c./neff; % velocità di gruppo
gamma_conf = 0.17 % fattore di confinamento ottico nella regione attiva (DA SIMULAZIONE COMSOL)
alpha = 1.53e3; % guadagno (supposto costante, pari a guadagno di soglia - DA SCRIPT DI SOGLIA)
B = 1e-16; % coeff. di ricombinazione molecolare
C = 3e-41; % coeff. di Auger
epsilon = 1.25e-23; % coeff. di compressione del guadagno

%parametri geometrici
d = 0.1e-6; % spessore della regione attiva
w = 2e-6; % larghezza regione attiva
area = d*w; % area della sezione della regione attiva
L = 1e-3; % lunghezza della regione attiva
V = area *L; % volume della regione attiva

A = vg*gamma_conf*alpha*V;

% normalizzazioni
I0 = N0*q*V/tau_n;
tau_norm = tau_n/tau_p;
S0 = 1/(A*tau_n);

% condizioni iniziali per rate equations
START = 0; % istante iniziale dell'osservazione
TWIN = 20; % durata osservazione
TSPAN = [START START+TWIN]; % vettore istante iniziale - finale
Y0 = [0 0]; % condizioni iniziali per densità dei portatori e densità fotonica
p = [I0 B tau_n N0 C epsilon S0 beta tau_norm]; % vettore dei parametri per rate equations (da fornire alla funzione "rate_equation()")
OPTIONS = []; % opzioni per la chiamata al solutore del sistema

%parametri curva luce-corrente
I = 0e-3; % corrente iniziale
DELTA_I = 10e-3; % passo di corrente
N = 10; % numero di correnti da testare

%preallocazioni
S = zeros(1,N); % vettore delle densità fotoniche nel mezzo attivo
current = zeros(1,N); % vettore delle correnti di pompaggio

%ciclo di soluzione delle rate equations al variare della corrente di pompaggio
for i=1:N

    [T,Y] = ode15s(@rate_equation,TSPAN,Y0,OPTIONS,p,I); % chiamata al solutore del sistema delle rate equations
    S(i) = Y((length(Y(:,2))),2); % store della densità fotonica normalizzata a regime attuale
    current(i) = I; % store della corrente attuale
    I = I + DELTA_I; % aggiornamento della corrente attuale prima dell'iterazione
end

potenza = S*S0*area/gamma_conf*vg*h*c/lambda0; % vettore della potenza [W]

figure(1)
plot(current/1e-3,potenza/1e-3)
```

La relazione^[1], adottata nello script, tra la densità fotonica alla faccia d'uscita, S , e la potenza ottica in uscita, P , è valida, purché la densità fotonica sia mediamente costante in tutta la cavità: avendo assunto un kL unitario, questa ipotesi dovrebbe essere verificata. Si ripropone di seguito la relazione potenza-densità fotonica:

$$P = \frac{V/L}{\Gamma_{core}} v_g \frac{hc}{\lambda} S$$

dove il rapporto V/L corrisponde all'area della sezione trasversale del mezzo attivo, h è la costante di Planck, mentre le altre quantità sono già state definite.

Si riportano in fig. 13 le curve luce-corrente calcolate per entrambe le guide d'onda proposte: si possono osservare *correnti di soglia* di circa 11 [mA] e *differential-responsivity* di circa 0.35 [W/A].

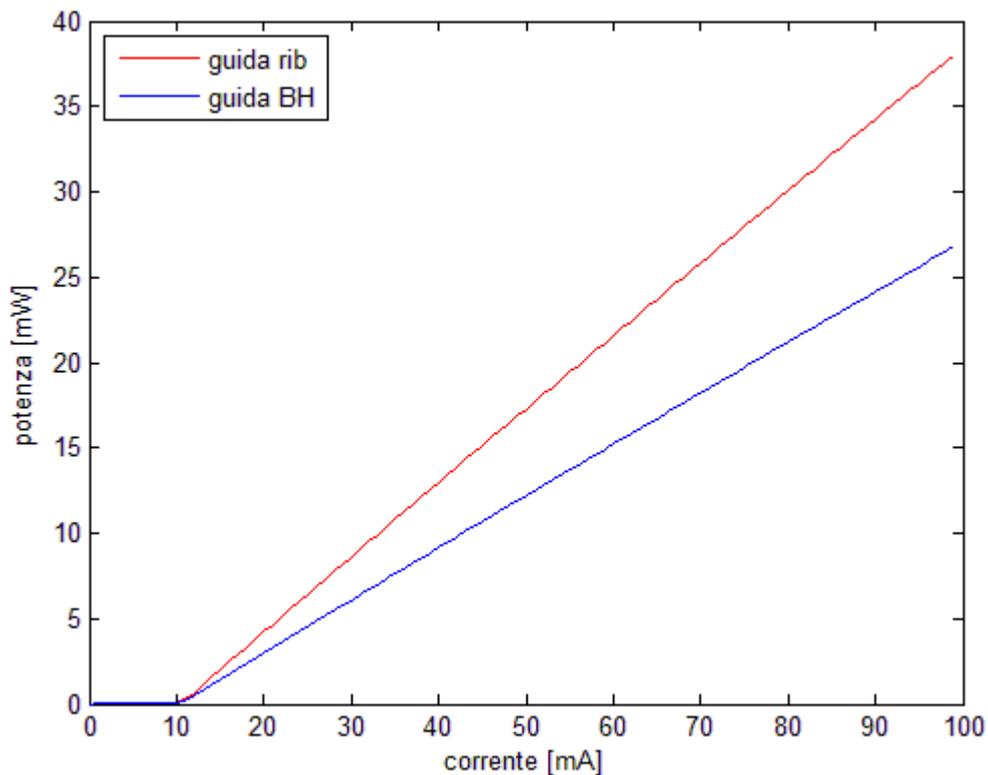


Fig. 13: Curva luce-corrente (potenza ottica in uscita in funzione della corrente di polarizzazione)

Appendice A1 – Diodo laser DFB: equazione d'onda ed equazioni dei modi accoppiati^[1]

Il funzionamento di un laser a semiconduttori DFB è basato sulla teoria della propagazione di onde in strutture periodiche.

Perturbazioni in mezzi dielettrici, indotte da reticoli o corrugazioni, producono un accoppiamento tra onda diretta e onda riflessa.

Si dispone di metodi numerici che consentono di calcolare la soluzione delle equazioni di Maxwell in tali strutture.

In un mezzo omogeneo, senza sorgenti e senza perdite, ogni campo elettrico variabile col tempo, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, deve soddisfare l'equazione d'onda vettoriale:

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 n^2 \vec{E} = 0$$

dove la dipendenza dal tempo del campo elettrico è del tipo $e^{j\omega t}$, “n” è l'indice di rifrazione del mezzo e “k₀” è la costante di propagazione nel vuoto.

In un laser a semiconduttore, costituito da mezzi delimitati trasversalmente e lateralmente, il campo elettrico deve soddisfare l'equazione d'onda monodimensionale omogenea:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2(z) \right] E(z) = 0$$

dove “z” è la direzione di propagazione dell'onda, coincidente con la dimensione

longitudinale del dispositivo.

Si considera ora un sistema dielettrico multi-strato in cui siano presenti corrugazioni periodiche lungo una delle interfacce, come in fig. 1-A1:

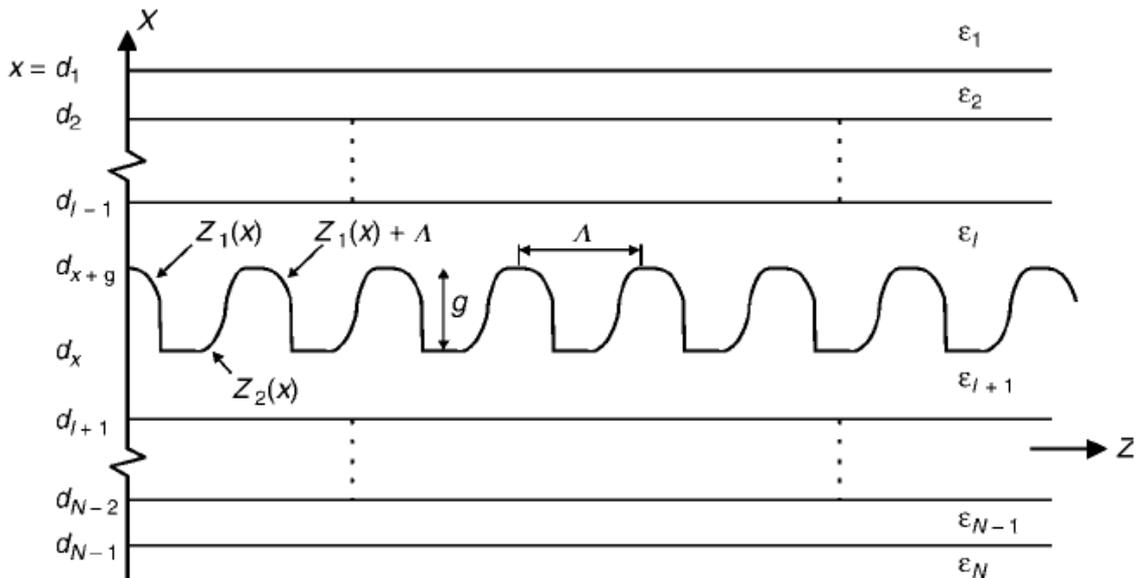


Fig. 1-A1: Generico sistema dielettrico multi-strato usato per mostrare la perturbazione dell'indice di rifrazione ed il guadagno di ampiezza. $Z_1(x)$ e $Z_2(x)$ sono due funzioni di corrugazione (fonte: "Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters", Ghafouri-Shiraz).

La permittività complessa dello strato j -esimo è denotata da " ϵ_j ", mentre " g " e " Λ " sono l'altezza ed il periodo della corrugazione, rispettivamente.

Le corrugazioni sono disposte in direzione longitudinale, e, dunque, la costante di propagazione dell'onda, $k(z)$, funzione della coordinata z , può essere espressa da:

$$k^2(z) = \omega^2 \mu \epsilon'(z)$$

dove ω è la frequenza angolare della radiazione ed $\epsilon'(z)$ è la permittività complessa del mezzo.

Quando la frequenza della radiazione è sufficientemente vicina alla frequenza di

risonanza, l'equazione precedente può essere espressa come:

$$k^2 = k_0^2 n^2(z) \left(1 + j \frac{2\alpha(z)}{k_0 n(z)} \right)$$

dove “ $n(z)$ ” e “ $\alpha(z)$ ” sono, rispettivamente, l'indice di rifrazione ed il coefficiente di guadagno d'ampiezza.

La regione del reticolo è rappresentata dai punti (x,y,z) che soddisfano la relazione:

$$d_x \leq x \leq d_x + g$$

All'interno di tale regione, le espressioni dell'indice di rifrazione ed il coefficiente di guadagno sono del tipo:

$$n(z) = n_0 + \Delta n \cos(2\beta_0 z + \Omega)$$

$$\alpha(z) = \alpha_0 + \Delta \alpha \cos(2\beta_0 z + \Omega + \theta)$$

dove “ n_0 ” e “ α_0 ” sono i valori medi di indice di rifrazione e di coefficiente di guadagno, “ Δn ” e “ $\Delta \alpha$ ” sono le variazioni massime d'indice di rifrazione e di coefficiente di guadagno, “ Ω ” è il residuo di fase del reticolo all'estremità di riferimento (eventualmente non nullo), “ β_0 ” è la costante di propagazione, “ θ ” la differenza di fase relativa tra le perturbazioni dell'indice e del coefficiente di guadagno.

Supponiamo che un'onda piana incida sulla guida d'onda corrugata senza perdite, con un angolo Φ , come in fig. 2-A1.

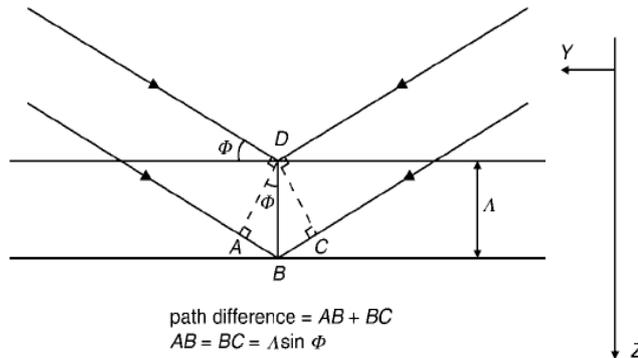


Fig. 2-A1: Modello semplificato usato per descrivere la condizione di Bragg in una guida d'onda periodica (fonte: "Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters", Ghafouri-Shiraz).

Si assuma β_0 come costante di propagazione dell'onda. A passo Λ , l'onda incidente risentirà dello stessa variazione d'indice, subendo riflessioni ad ogni interfaccia. Per una guida d'onda costituita da N corrugazioni periodiche, ci saranno N riflessioni. Affinché due onde riflesse si sommino in fase, ovvero interferiscano costruttivamente, la differenza di fase tra di esse deve essere un multiplo di 2π . Con riferimento alla fig. 2, dovrà essere:

$$\beta_0 (AB + BC) = \beta_0 (2 \Lambda \sin \phi) = 2m \pi$$

dove "m" è un intero, e $(AB + BC)$ è la differenza di cammino tra i due raggi riflessi.

Se si considera un'onda con incidenza normale ($\phi = \pi/2$), l'equazione diventa:

$$2 \beta_0 \Lambda = 2 m \pi$$

Questa è nota come *condizione di Bragg* e β_0 prende il nome di *costante di*

propagazione di Bragg. L'intero “m” definisce l'ordine della diffrazione di Bragg.

Poiché si desidera che il dispositivo agisca da cavità risonante auto-sostenuta, la condizione di Bragg deve essere soddisfatta. Se si assume una risonanza di Bragg del primo ordine (m=1), si ha:

$$\beta_0 \equiv \frac{2\pi n_0}{\lambda_B} \equiv \frac{n_0 \omega_B}{c} = \frac{\pi}{\Lambda}$$

dove “ λ_B ” e “ ω_B ” sono, rispettivamente, la *lunghezza d'onda di Bragg* e la *frequenza di Bragg*.

Da questa equazione risulta evidente il legame tra la costante di propagazione di Bragg, β_0 , ed il periodo del reticolo, Λ . In particolare, alterando il periodo del reticolo, la lunghezza d'onda di Bragg può essere spostata in accordo con l'applicazione specifica.

Si procede con un'analisi per piccolo segnale, secondo cui le variazioni d'indice e di guadagno sono sempre più piccole dei rispettivi valori non perturbati, cioè:

$$\Delta n \ll n_0, \quad \Delta a \ll a_0$$

Dunque, sostituendo le espressioni di $n(z)$ e di $\alpha(z)$ nell'espressione della costante di propagazione, e trascurando i termini Δn^2 e $\Delta \alpha^2$ rispetto a n_0 e α_0 , si ha:

$$k^2(z) = k_0^2 n_0^2 + 2jk_0 n_0 \alpha_0 + 2k_0 [k_0 n_0 + j\alpha_0] \Delta n \cos(2\beta_0 z + \Omega) + 2jk_0 n_0 \Delta \alpha \cos(2\beta_0 z + \Omega + \theta)$$

Ponendo $\beta = k_0 n_0 + j\alpha_0$, la costante di propagazione può essere espressa come:

$$k^2(z) = \beta^2 + 2j\beta \alpha_0 + 2\beta \left[\frac{\pi \Delta n}{\lambda} + j \frac{\Delta \alpha}{2} e^{j\theta} \right] e^{j(2\beta_0 z + \Omega)} + 2\beta \left[\frac{\pi \Delta n}{\lambda} + j \frac{\Delta \alpha}{2} e^{-j\theta} \right] e^{-j(2\beta_0 z + \Omega)}$$

Nel caso in cui $\theta = 0$ (cioè se si considerano variazioni d'indice di rifrazione e di guadagno in fase tra loro), si ha:

$$k^2(z) = \beta^2 + 2j\beta\alpha_0 + 4\beta\left[\frac{\pi\Delta n}{\lambda} + j\frac{\Delta\alpha}{2}\right]\cos(2\beta_0 z + \Omega)$$

Raggruppando i termini legati alle perturbazioni nel parametro “ κ ”, noto come *coefficiente di accoppiamento* :

$$\kappa = \frac{\pi\Delta n}{\lambda} + j\frac{\Delta\alpha}{2} = \kappa_i + j\kappa_g$$

con “ κ_i ” che include i contributi dovuti alla perturbazione dell'indice di rifrazione, e “ κ_g ” che include i contributi dovuti alla perturbazione del guadagno, si ricava un'espressione più compatta:

$$k^2(z) = \beta^2 + 2j\beta\alpha_0 + 4\kappa\beta\cos(2\beta_0 z + \Omega)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione d'onda mono-dimensionale si ottiene:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + [\beta^2 + 2j\beta\alpha_0 + 2\kappa\beta e^{j(2\beta_0 z + \Omega)} + 2\kappa\beta e^{-j(2\beta_0 z + \Omega)}] E = 0$$

dove la funzione coseno del coefficiente di accoppiamento è stata espressa in forma fasoriale.

Una soluzione dell'equazione d'onda scalare può essere una combinazione lineare di due modi contro-propaganti del tipo:

$$E(z) = A(z)e^{-jk_{um}z} + B(z)e^{jk_{um}z}$$

con $k_{um}^2 = \beta^2 + 2j\beta\alpha_0 \approx (\beta + j\alpha_0)^2$ (quest'ultima identità è valida nell'ipotesi $\beta \gg \alpha_0$).

Nella soluzione proposta, $A(z)$ e $B(z)$ sono le ampiezze complesse delle onde diretta e riflessa, k_{un} è la costante di propagazione complessa per la struttura non perturbata (“unperturbed”), ottenuta cioè con $\Delta n = \Delta\alpha = 0$ (cioè $\kappa=0$).

La soluzione dell'equazione d'onda scalare, nell'ipotesi $\beta \gg \alpha_0$, può essere espressa in termini della costante di propagazione reale, β :

$$E(z) = A(z)e^{\alpha_0 z} e^{-j\beta z} + B(z)e^{-\alpha_0 z} e^{j\beta z} = C(z)e^{-j\beta z} + D(z)e^{j\beta z}$$

Affinché la condizione di Bragg sia soddisfatta, la costante di propagazione della radiazione che incide sulla guida perturbata, β , deve essere sufficientemente prossima alla costante di propagazione di Bragg, β_0 , ossia il modulo della loro differenza deve essere molto più piccolo della costante di Bragg: $|\beta - \beta_0| \ll \beta_0$.

Questa quantità è comunemente nota come *fattore di detuning* o *coefficiente di detuning*, δ , definito come:

$$\delta = \beta - \beta_0$$

Di conseguenza, la soluzione dell'equazione d'onda può essere espressa in termini della costante di propagazione di Bragg:

$$E(z) = C(z)e^{-\delta z} e^{-j\beta_0 z} + D(z)e^{\delta z} e^{j\beta_0 z} = R(z)e^{-j\beta_0 z} + S(z)e^{j\beta_0 z}$$

dove $R(z)$ e $S(z)$ sono le funzioni d'ampiezza complesse.

Questa espressione della soluzione è più conveniente, poiché il periodo del reticolo, Λ , in un laser DFB a semiconduttore è, solitamente, costante, e, quindi, lo è la costante di propagazione di Bragg.

Sostituendo quest'ultima soluzione nell'equazione d'onda si ricava:

$$\begin{aligned} & (R'' - 2j\beta_0 R' - \beta_0^2 R + \beta^2 R + 2j\beta\alpha_0 R) e^{-j\beta_0 z} \\ & + (S'' - 2j\beta_0 S' - \beta_0^2 S + \beta^2 S + 2j\beta\alpha_0 S) e^{j\beta_0 z} \\ & + 2\kappa\beta(e^{2j\beta_0 z} e^{j\Omega} + e^{-2j\beta_0 z} e^{-j\Omega})(R e^{-j\beta_0 z} + S e^{j\beta_0 z}) = 0 \end{aligned}$$

dove R' e R'' sono le derivate prima e seconda di R , mentre S' e S'' sono le derivate prima e seconda di S , rispettivamente.

Per l'approssimazione di ampiezze “lente” su R ed S , è possibile trascurare le derivate di ordine più elevato R'' ed S'' , molto più piccole di R' ed S' .

Separando l'equazione in due gruppi, ciascuno avente la stessa dipendenza esponenziale, si ricavano le seguenti *equazioni d'onda accoppiate* o *modi accoppiati*:

$$-\frac{dR}{dz} + (\alpha_0 - j\delta)R = j\kappa S e^{-j\Omega}$$

$$\frac{dS}{dz} + (\alpha_0 - j\delta)S = j\kappa R e^{j\Omega}$$

La prima equazione raccoglie tutti i termini di fase $\exp(-j\beta_0 z)$ che si propagano nel verso positivo di z , mentre la seconda raccoglie i termini di fase $\exp(+j\beta_0 z)$ che si propagano nel verso negativo di z .

Poiché $|\delta| \ll \beta$, altri termini di fase “veloci” come $\exp(3j\beta_0 z)$ sono stati scartati.

Inoltre, nella derivazione delle due equazioni, la seguente approssimazione è stata assunta:

$$\frac{(\beta^2 - \beta_0^2)}{2\beta_0} \approx \beta - \beta_0 = \delta$$

Seguendo la stessa procedura è possibile anche tener conto di una differenza di fase non nulla tra la perturbazione d'indice e quella di guadagno($\theta \neq 0$), ricavando una coppia di equazioni più generale:

$$-\frac{dR}{dz} + (\alpha_0 - j\delta)R = j\kappa_{RS} S e^{-j\Omega}$$

$$\frac{dS}{dz} + (\alpha_0 - j\delta)S = j\kappa_{SR} R e^{j\Omega}$$

dove “ κ_{RS} ” è il coefficiente di accoppiamento diretto e “ κ_{SR} ” è quello di accoppiamento inverso, definiti come:

$$\kappa_{RS} = \kappa_i + j\kappa_g e^{-j\theta}$$

$$\kappa_{SR} = \kappa_i + j\kappa_g e^{j\theta}$$

Dunque, dall'equazione d'onda scalare è stato ricavato un sistema di 2 equazioni accoppiate; il coefficiente di accoppiamento in avanti κ_{RS} induce il campo elettrico $S(z)$, che viaggia nel verso negativo di z , ad accoppiarsi con il campo contro-propagante $R(z)$, e, viceversa, per κ_{SR} .

Diversamente dai laser Fabry-Perot, in cui la retroazione ottica è realizzata dalle facce del laser(specchi), la retroazione ottica nei laser DFB a semiconduttore avviene continuamente lungo lo strato attivo, nel reticolo.

In base alla natura del coefficiente di accoppiamento i laser DFB a semiconduttori sono classificati in tre differenti gruppi:

- laser DFB con accoppiamento puro d'indice
- laser DFB con accoppiamento misto
- laser DFB con accoppiamento puro di guadagno

Appendice A2 - Diodo Laser DFB con accoppiamento puro di indice: equazioni dei modi accoppiati ed equazione di soglia^[1]

La maggior parte dei più comuni laser a semiconduttori è di tipo ad accoppiamento puro di indice, cioè con accoppiamento generato esclusivamente dalla perturbazione dell'indice di rifrazione.

Si realizza una corrugazione nello strato posto al di sopra o al di sotto dello strato attivo, come in fig. 1-A2:

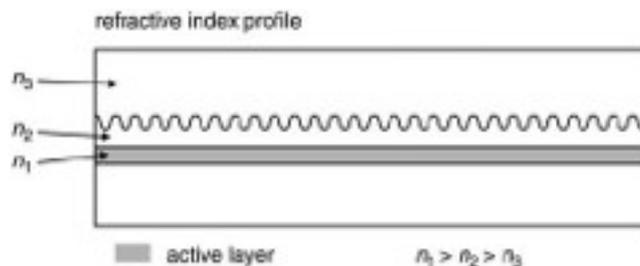


Fig. 1-A2: Vista longitudinale di un laser a semiconduttore DFB con accoppiamento puro di indice (fonte: "Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters", Ghafouri-Shiraz).

Il guadagno d'ampiezza del laser non viene modificato, dato che lo strato attivo non viene perturbato dal reticolo. Di conseguenza, ponendo $\kappa_g=0$, il coefficiente d'accoppiamento d'indice κ_i (che è puramente reale) è legato a κ_{RS} e κ_{SR} dalla relazione: $\kappa_{RS}=\kappa_{SR}=\kappa_i=\kappa$.

Il sistema dei modi accoppiati si presenta, dunque, come:

$$-\frac{dR}{dz} + (\alpha_s - j\delta)R = j\kappa S e^{-j\Omega}$$

$$\frac{dS}{dz} + (\alpha_s - j\delta)S = j\kappa R e^{j\Omega}$$

dove, come nel paragrafo precedente, $R(z)$ e $S(z)$ sono, rispettivamente, le ampiezze complesse dell'onda diretta e riflessa, α_s è il coefficiente di guadagno d'ampiezza, δ è il coefficiente di detuning, κ è il coefficiente d'accoppiamento, Ω è il residuo di fase nell'origine.

La soluzione ricercata per l'equazione dei modi accoppiati è:

$$E(z) = R(z)e^{-j\beta_0 z} + S(z)e^{j\beta_0 z}$$

dove $R(z) = R_1 e^{\gamma z} + R_2 e^{-\gamma z}$ e $S(z) = S_1 e^{\gamma z} + S_2 e^{-\gamma z}$.

In queste espressioni, R_1 , R_2 , S_1 , S_2 sono coefficienti complessi e γ è la costante di propagazione complessa, determinata dalle condizioni al contorno alle facce del laser, e, dunque, dipendente dalle caratteristiche di queste ultime.

Senza perdere di generalità, si può assumere $\text{Re}(\gamma) > 0$. In tal caso, i termini relativi a R_1 ed S_2 vengono amplificati, mentre quelli relativi ad R_2 ed S_1 vengono attenuati.

Sostituendo le espressioni di $R(z)$ ed $S(z)$ nella soluzione proposta, si può dimostrare che la costante di propagazione delle onde amplificate è $\beta_0 - \text{Im}(\gamma)$, mentre quella delle onde attenuate è $\beta_0 + \text{Im}(\gamma)$.

Dunque, sostituendo la soluzione ipotizzata nell'equazione dei modi accoppiati, e raggruppando i termini equi-fase, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\hat{\Gamma} R_1 = j\kappa e^{-j\Omega} S_1$$

$$\Gamma R_2 = j\kappa e^{-j\Omega} S_2$$

$$\Gamma S_1 = j\kappa e^{j\Omega} R_1$$

$$\hat{\Gamma} S_2 = j\kappa e^{j\Omega} R_2$$

dove

$$\hat{\Gamma} = \alpha_s - j\delta - \gamma$$

$$\Gamma = \alpha_s - j\delta + \gamma$$

Il sistema ammette una soluzione diversa dalla banale, purché sia verificata la seguente *equazione di dispersione*:

$$\hat{\Gamma} = -\frac{\kappa^2}{\Gamma}$$

ovvero $\frac{\hat{\Gamma}}{j\kappa} = \frac{j\kappa}{\Gamma}$, o equivalentemente $\gamma^2 = (\alpha_s - j\delta)^2 + \kappa^2$.

Si osservi che l'equazione di dispersione, come auspicabile, è indipendente dal residuo di fase Ω .

Posto $\rho = \frac{\hat{\Gamma}}{j\kappa} = \frac{j\kappa}{\Gamma}$, è possibile eliminare due incognite dal sistema:

$$R_1 = \frac{1}{\rho} e^{-j\Omega} S_1$$

$$R_2 = \rho e^{-j\Omega} S_2$$

Se si considera una cavità laser di lunghezza L , che si estende da $z = z_1$ a $z = z_2$, le condizioni al contorno alle facce terminali diventano:

$$R(z_1) e^{-j\beta_0 z_1} = \hat{r}_1 S(z_1) e^{j\beta_0 z_1}$$

$$S(z_2) e^{j\beta_0 z_2} = \hat{r}_2 R(z_2) e^{-j\beta_0 z_2}$$

dove \hat{r}_1 ed \hat{r}_2 sono i coefficienti di riflessione alle facce del laser z_1 e z_2 , rispettivamente.

Se si pone $r_1 = \hat{r}_1 e^{j\Omega} e^{2j\beta_0 z_1}$ e $r_2 = \hat{r}_2 e^{-j\Omega} e^{-2j\beta_0 z_2}$, le condizioni al contorno impongono le seguenti:

$$R_2 = \frac{(1 - \rho r_1) e^{2\gamma z_1}}{\frac{r_1}{\rho} - 1} R_1$$

$$R_2 = \frac{(r_2 - \rho) e^{2\gamma z_2}}{\frac{1}{\rho} - r_2} R_1$$

Queste relazioni sono soddisfatte se è verificata la seguente condizione:

$$\frac{(1 - \rho r_1) e^{2\gamma z_1}}{r_1 - \rho} = \frac{(r_2 - \rho) e^{2\gamma z_2}}{1 - \rho r_2}$$

Risolvendo rispetto a ρ (notando che $\gamma = -\frac{1}{2}(\hat{\Gamma} - \Gamma) = -j\frac{\kappa}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$), ed effettuando alcuni passaggi, si giunge alla seguente *equazione agli auto-valori*:

$$\gamma L = \frac{-j\kappa \sinh(\gamma L)}{D} \{(r_1 + r_2)(1 - r_1 r_2) \cosh(\gamma L) \pm (1 + r_1 r_2) \Delta^{\frac{1}{2}}\}$$

dove

$$\Delta = (r_1 - r_2)^2 \sinh^2(\gamma L) + (1 - r_1 r_2)^2$$

$$D = (1 + r_1 r_2)^2 - 4r_1 r_2 \cosh^2(\gamma L)$$

$$r_1 = \hat{r}_1 e^{j\Omega} e^{2j\beta_0 z_1}$$

$$r_2 = \hat{r}_2 e^{-j\Omega} e^{-2j\beta_0 z_2}$$

Elevando al quadrato l'equazione agli auto-valori, si ricava, dopo opportune manipolazioni, la seguente *equazione trascendentale complessa*, che stabilisce le caratteristiche di soglia del laser:

$$(\gamma L)^2 D + (\kappa L)^2 \sinh^2(\gamma L)(1-r_1^2)(1-r_2^2) + 2j\kappa L(r_1+r_2)^2(1-r_1r_2)\gamma L \sinh(\gamma L) \cosh(\gamma L) = 0$$

Questa equazione è generica, e consente di caratterizzare tutti i diodi laser a semiconduttore DFB con accoppiamento puro d'indice.

E' un'equazione di variabile complessa, γ , con 4 parametri, L , κ , r_1 , r_2 , dai quali dipendono il guadagno di soglia, α_s , del modo di frequenza $\omega_0 + \delta$.

A causa della natura complessa dell'equazione, metodi numerici come la tecnica iterativa di Newton-Raphson^[2] possono essere usati per risolverla, poiché la condizione di Cauchy-Riemann sulle funzioni analitiche è soddisfatta.

Si assegna un valore iniziale alla coppia $(\delta, \alpha_s) = (\delta, \alpha_s)_{ini}$, scegliendo in un intervallo opportuno di valori. In generale, la prima coppia scelta non è soluzione dell'equazione di soglia, e quindi l'iterazione continua, fornendo una nuova coppia $(\delta, \alpha_s)'$ da testare. Quando, all' n-esimo passo di iterazione, la coppia corrente $(\delta, \alpha_s)^n$ soddisferà l'equazione di soglia con un errore ragionevole, ovvero minore dell'accuratezza desiderata (tipicamente compresa tra 10^{-5} e 10^{-9}), l'iterazione può terminare. Usando diversi valori della coppia iniziale $(\delta, \alpha_s)_{ini}$, è possibile valutare tutti i modi supportati dal sistema: il modo con il guadagno di ampiezza più piccolo sarà il modo laser.

Appendice A3 – Diodo laser DFB: definizione strutturale del coefficiente d'accoppiamento^[1]

E' possibile mettere in relazione *la forma, la profondità ed il periodo* della corrugazione con il coefficiente d'accoppiamento, considerando una perturbazione generica della permittività relativa.

Si consideri la seguente forma dell'equazione d'onda vettoriale tempo-armonica, che include la permittività relativa, ϵ , funzione delle coordinate spaziali:

$$\nabla^2 \vec{E} + \epsilon(x, y, z) k_0^2 \vec{E} = 0$$

Poiché la corrugazione si estende in direzione longitudinale z , è possibile esprimere la permittività della guida come:

$$\epsilon(x, y, z) = \epsilon_{ini}(x, y) + \Delta\epsilon(x, y, z)$$

dove $\epsilon_{ini}(x,y)$ è la permittività media del piano trasverso (x,y) e $\Delta\epsilon$ è il termine di perturbazione, nullo ovunque ad eccezione dello strato corrugato, il cui spessore è pari alla profondità della corrugazione.

Assumendo eccitazione di un singolo modo TE, una soluzione generale dell'equazione d'onda vettoriale può essere della forma:

$$\vec{E} = U(x, y) [C e^{-j\beta z} + D e^{j\beta z}] \hat{j} = E_y \hat{j}$$

dove \hat{j} è il versore lungo la direzione y per il modo TE, β è la costante di propagazione del modo e $U(x,y)$ è il profilo di campo nel piano trasverso.

Per una data struttura guidante, la distribuzione di campo può essere ottenuta risolvendo con le opportune condizioni al contorno l'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + [\epsilon_{ini}(x, y) k_0^2 - \beta^2] U = 0$$

dove $V = \int \int U^2(x, y) dx dy$ è l'intensità del modo per la guida d'onda planare non perturbata.

Sotto l'influenza del termine di perturbazione $\Delta\epsilon$, le ampiezze C e D diventano dipendenti da z. Per piccole perturbazioni, $\Delta\epsilon \ll \epsilon_{ini}$, solo la distribuzione di campo U(x,y) varierà, motivo per cui essa stessa può essere separata dalla componente longitudinale della soluzione del campo.

Si sostituisce, dunque, la soluzione proposta per il modo TE nell'equazione d'onda, assumendo solo variazioni lente di C e D.

Si moltiplica l'equazione ottenuta per U(x,y) e si integra nel piano trasverso (x,y), ottenendo:

$$\frac{dC}{dz} e^{-j\beta z} - \frac{dD}{dz} e^{j\beta z} = -j \frac{k_0^2}{2\beta V} \int \int \Delta\epsilon(x, y, z) U^2(x, y) [C e^{-j\beta z} + D e^{j\beta z}] dz dy$$

Il termine di perturbazione $\Delta\epsilon$ è reale, poiché si è assunto solo accoppiamento d'indice. Inoltre, essendo periodico lungo z, esso può essere espanso in serie di Fourier:

$$\Delta\epsilon(x, y, z) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} A_{q \neq 0}(x, y) e^{2jq\pi \frac{z}{\Lambda}}$$

dove $A_{q \neq 0}(x, y)$ è il q-esimo coefficiente armonico di Fourier, dipendente dalla

forma, dalla profondità e dal periodo della corrugazione.

Per $q = 0$, si ha una funzione indipendente da z , il cui valore è pari alla permittività media ϵ_{ini} .

Sostituendo questa espressione della permittività nell'equazione precedente ed eguagliando i coefficienti con i termini esponenziali $\exp(\pm j\beta z)$, si ricava la seguente coppia di equazioni:

$$\frac{dC}{dz} = -j\kappa' D e^{j2\delta z}$$

$$\frac{dD}{dz} = j\kappa C e^{-j2\delta z}$$

dove κ è il coefficiente d'accoppiamento, κ' è il complesso coniugato di κ , “ m ” è l'ordine della diffrazione di Bragg, δ è il fattore di detuning, definito come:

$$\delta = \beta - \beta_0 = \beta - \frac{m\pi}{\Lambda}$$

I termini di fase di alto ordine sono stati trascurati.

Il coefficiente d'accoppiamento può essere scritto come:

$$\kappa = \frac{k_0^2 \iint A_{q \neq 0} U^2(x, y) dx dy}{2\beta \iint U^2(x, y) dx dy}$$

Quando la corrugazione non c'è o la profondità del reticolo tende a zero, si ha una guida d'onda planare. Con l'annullarsi del coefficiente d'accoppiamento κ , le equazioni dei modi accoppiati possono essere soddisfatte da qualsiasi funzione indipendente da z . D'altronde, a causa delle caratteristiche di guadagno del mezzo

all'interno della cavità laser, va aggiunto un termine addizionale alle equazioni dei modi. Risulta che, quando $\kappa=0$, le soluzioni C e D corrispondono, rispettivamente, ad onde esponenziali crescenti con $+z$ e $-z$. Dunque, affinché i requisiti fisici siano rispettati, le equazioni dei modi accoppiati diventano:

$$\frac{dC}{dz} = -j\kappa' D e^{j2\delta z} + g C$$

$$\frac{dD}{dz} = j\kappa C e^{-j2\delta z} - g D$$

dove compare il coefficiente di guadagno d'ampiezza, “g”.

Appendice A4 – Diodo laser DFB con accoppiamento puro d'indice: definizione del coefficiente d'accoppiamento^[1]

A causa del legame tra il coefficiente d'accoppiamento e la permittività relativa perturbata, il valore di κ dipende dalla forma, dalla profondità e dal periodo della corrugazione.

Inoltre, anche la composizione e lo spessore dello strato attivo e del cladding influiscono sul valore di κ , la cui determinazione richiede il calcolo dell'energia del modo trasverso.

In particolare, se si considera una etero-struttura sepolta (*buried heterostructure*) in cui lo spessore dello strato attivo sia molto più piccolo della larghezza, si può assumere la corrugazione lateralmente uniforme, in modo che $\Delta\epsilon$ sia indipendente da y . Risulta, dunque

$$\epsilon(x, y) = \epsilon_{in}(x) + \Delta\epsilon(x, y)$$

ed il coefficiente d'accoppiamento per laser DFB con accoppiamento d'indice diventa:

$$\kappa = \frac{k_0^2}{2\beta} \frac{\int_{corrugation} A_{q \neq 0} E_y^2(x) dx}{\int E_y^2(x) dx}$$

dove $E_y(x)$ è la componente di campo trasverso del modo TE che soddisfa l'equazione d'onda vettoriale. L'integrale a numeratore è ristretto allo strato corrugato, poiché solo in esso è definita la perturbazione di permittività $\Delta\epsilon$ (o anche il coefficiente di Fourier

A_q).

Si considera, ora, un modello generico di sistema multi-strato ad N livelli per analizzare l'effetto di differenti forme del reticolo, come in fig. 1-A4.

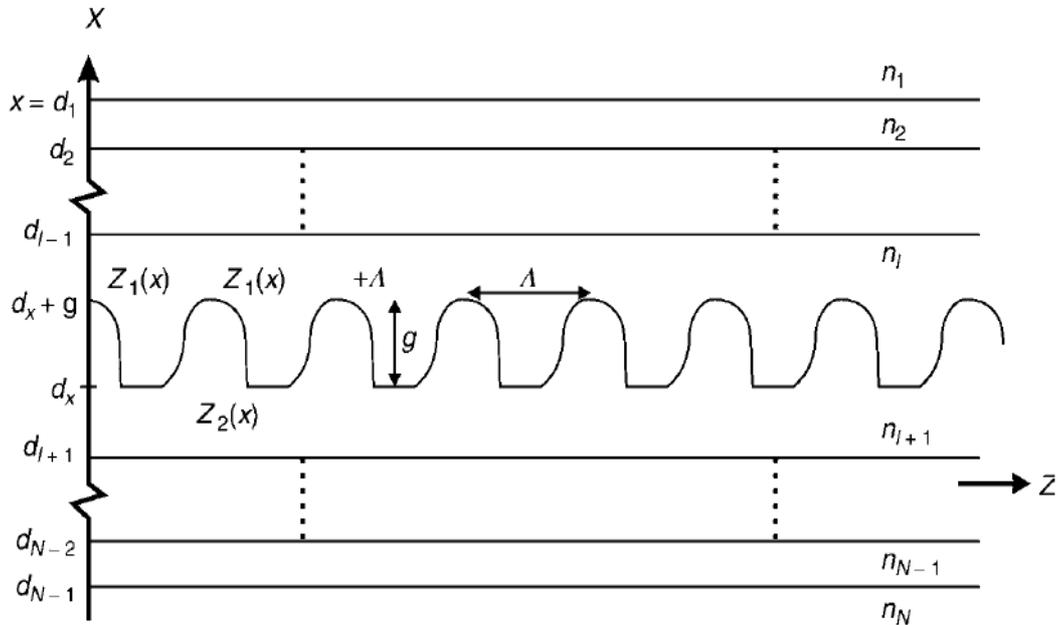


Fig. 1-A4: Modello generico di sistema multi-strato per lo studio di differenti forme della corrugazione (fonte: "Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters", Ghafouri-Shiraz).

Qui la corrugazione cosinusoidale è stata rimpiazzata da due funzioni discontinue arbitrarie $Z_1(x) + p\Lambda$ e $Z_2(x) + p\Lambda$, dove "p" è un intero e " Λ " è il periodo della corrugazione.

Qualunque sia la forma della corrugazione, è importante che la somma delle funzioni di corrugazione, $Z_1(x) + p\Lambda$ e $Z_2(x) + p\Lambda$, copra una distanza longitudinale pari a Λ .

Per semplicità, $p = 0$ per la prima funzione di corrugazione che si incontra nel semipiano positivo (x,z) . E' possibile, dunque, esprimere analiticamente la permittività relativa $\epsilon(x,z)$ negli strati non corrugati:

$$\epsilon(x, z) = \begin{array}{l} n_1^2, \quad x > d_1 \\ n_2^2, \quad d_1 > x > d_2 \\ \vdots \\ n_l^2, \quad d_{l-1} > x > d_x + g \\ n_{l+1}^2, \quad d_x > x > d_{l+1} \\ \vdots \\ n_{N-1}^2, \quad d_{N-2} > x > d_{N-1} \\ n_N^2, \quad d_{N-1} > x \end{array}$$

Mentre, per la permittività della regione corrugata, si può scrivere:

$$\epsilon(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} n_l^2 \{ u[z - Z_1(z) - p\Lambda] - u[z - Z_2(z) - p\Lambda] \} + n_{l+1}^2 \{ u[z - Z_2(z) - p\Lambda] - u[z - Z_1(z) - (p+1)\Lambda] \}$$

dove

$$u(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

è la funzione gradino unitario.

Eguagliando quest'ultima espressione di $\Delta\epsilon$ con il suo sviluppo in serie di Fourier e ponendo $p = 0$, si ha:

$$A_{q=0} = A_0 = n_{l+1}^2 + \frac{1}{\Lambda} [Z_2(x) - Z_1(x)] n_l^2 - n_{l+1}^2$$

$$A_{q \neq 0} = \frac{1}{\Lambda} \int_{Z_1(z)}^{Z_1(z)+\Lambda} n^2(x, z) e^{-j2\pi qz/\Lambda} dz = \frac{(n_{l+1}^2 - n_l^2)}{2j\pi q} \left[e^{-j\frac{2\pi q Z_2(x)}{\Lambda}} - e^{-j\frac{2\pi q Z_1(x)}{\Lambda}} \right]$$

L'ultima identità è giustificata dal fatto che l'integrale può essere separato in due parti:

$$\int_{Z_1(x)}^{Z_1(x)+\Lambda} [] = \int_{Z_1(x)}^{Z_2(x)} [] + \int_{Z_2(x)}^{Z_1(x)+\Lambda} []$$

La permittività relativa nei diversi intervalli di integrazione può essere espressa come:

$$n^2(x, z) = \begin{cases} n_l^2 & , \quad Z_2(x) > z > Z_1(x) \\ n_{l+1}^2 & , \quad Z_1(x) + \Lambda > z > Z_2(x) \end{cases}$$

Poiché $Z_1(x) + Z_2(x) = \Lambda$, si può ulteriormente semplificare l'espressione di $A_{q \neq 0}$:

$$A_{q \neq 0} = \frac{(n_{l+1}^2 - n_l^2)}{m\pi} \sin\left[\frac{2m\pi Z_1(z)}{\Lambda}\right], \quad d_x < x < d_x + g$$

dove si è assunto $q = m$ per il più piccolo fattore di detuning.

Infine, sostituendo $A_{q \neq 0}$ nell'ultima espressione di κ , si ha:

$$\kappa = k_0^2 \frac{(n_{l+1}^2 - n_l^2)}{2m\pi\beta \int E_y^2(x) dx} \left| \int_{\text{corrugation}} \sin\left[\frac{2m\pi Z_1(x)}{\Lambda}\right] E_y^2(x) dx \right|$$

che è il coefficiente d'accoppiamento di un diodo laser DFB con accoppiamento d'indice con reticolo descritto dalle funzioni $Z_1(x)$ e $Z_2(x)$. Il modulo a secondo membro assicura un valore sempre positivo del coefficiente.

In fig. 2-A4, sono mostrate alcune funzioni di corrugazione $Z_1(x)$ con profili trapezoidali, rettangolari e sinusoidali.

Per lo scavo trapezoidale, W_T e W_B denotano la larghezza superiore e quella inferiore dello scavo. Per semplicità, si assume che il lato con pendenza positiva e quello con pendenza negativa occupino la stessa distanza W .

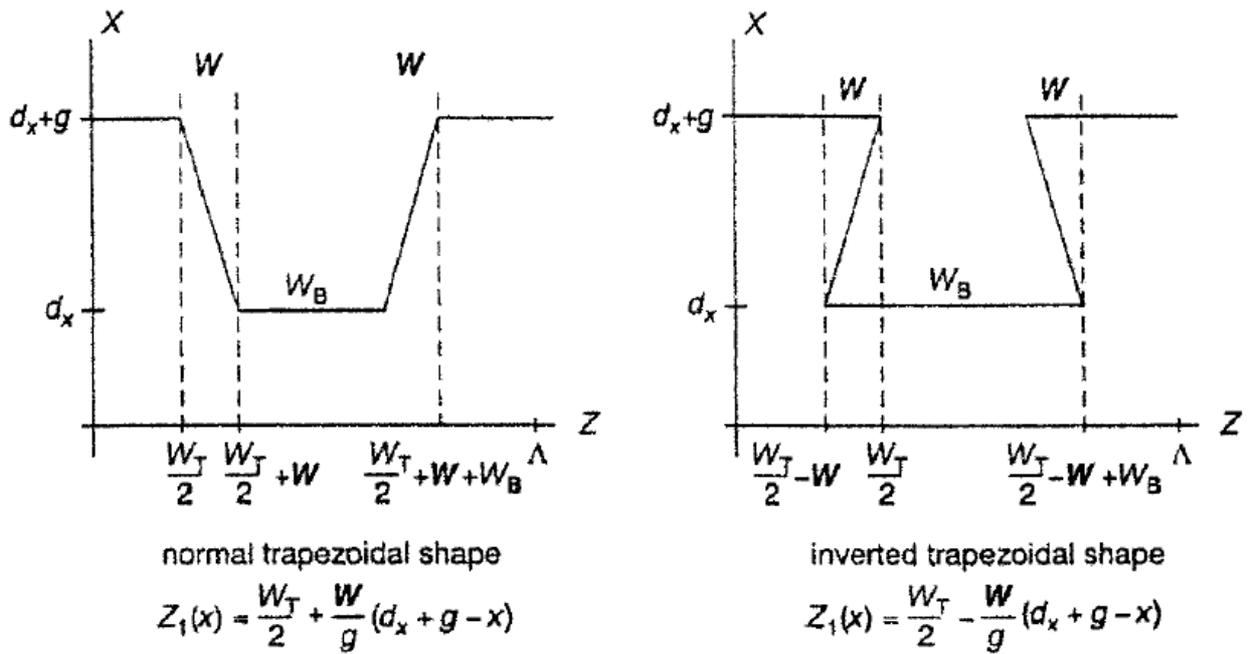


Fig. 2-A4.a: Profilo trapezoidale della corrugazione (fonte: "Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters", Ghafouri-Shiraz).

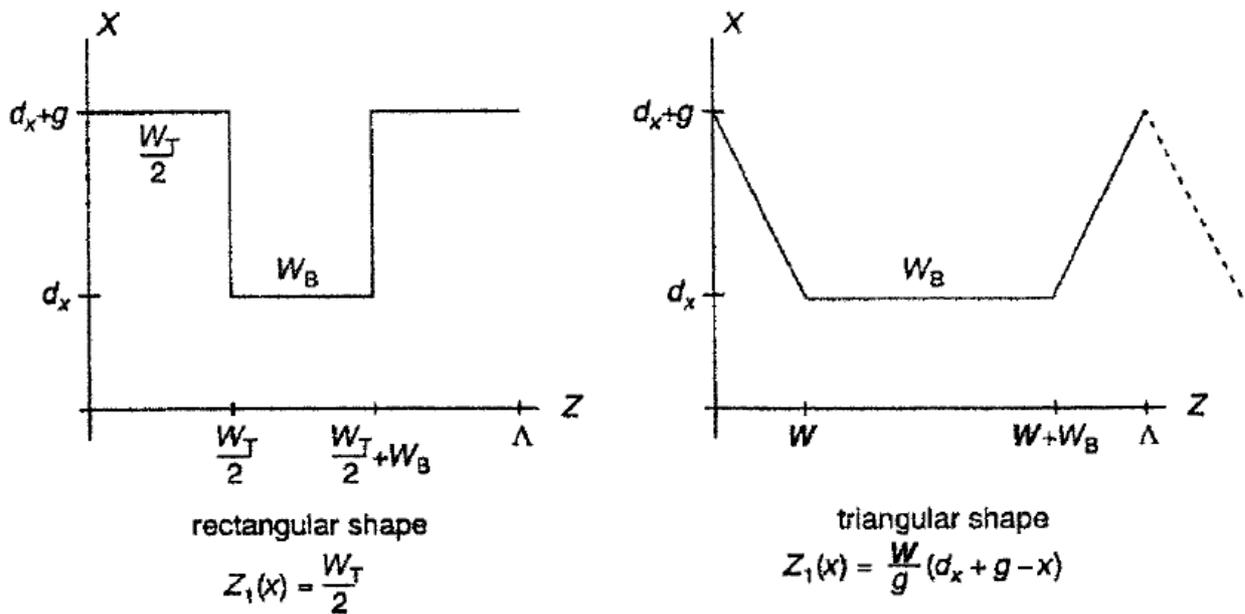


Fig. 2-A4.b: Profili rettangolare e triangolare della corrugazione (fonte: "Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters", Ghafouri-Shiraz).

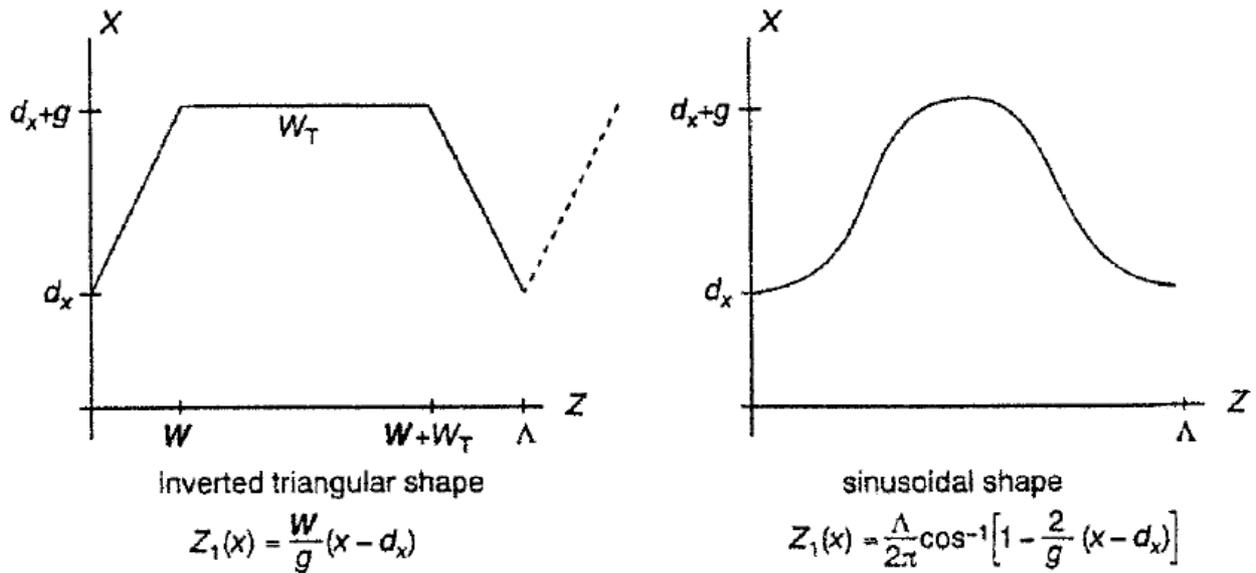


Fig. 2-A4.c: Profili triangolare-inverso e sinusoidale della corrugazione (fonte: "Distributed Feedback Laser Diodes and Optical Tunable Filters", Ghafouri-Shiraz).

Si vede, dunque, che se $Z_1(x) = \frac{\Lambda}{2}$, cioè si impone un duty cycle del 50%, allora

$W_B = W_T = \frac{\Lambda}{2}$. Quindi, nel caso di reticolo a forma d'onda rettangolare, poiché

$Z_1 = \frac{W_T}{2} = \frac{\Lambda}{4}$, si ha che $\sin\left(\frac{2m\pi\Lambda}{\Lambda 4}\right) = 1$, e l'espressione del coefficiente

d'accoppiamento può essere semplificata come:

$$\kappa = \frac{k_0^2}{2\pi\beta} (n_u^2 - n_p^2) \Gamma_{corrugation}$$

dove $\Gamma_{corrugation} = \frac{\left| \int_{corrugation} E_y^2(x) dx \right|}{\int E_y^2(x) dx}$ è equivalente ad un fattore di confinamento ottico

relativo alla regione-strato in cui è realizzata la corrugazione.

Appendice A5 - Guadagno del mezzo e rate equations nei laser a semiconduttori^[1-3]

Si considera una guida d'onda dielettrica, infinitamente lunga, di un mezzo con permittività ϵ' genericamente complessa ed un'onda che vi si propaga. Dopo una distanza di attraversamento pari a L , il guadagno di potenza può essere definito da un fattore di amplificazione, G , pari a:

$$G = e^{(g - \alpha_{loss})L}$$

dove g è il guadagno del mezzo e α_{loss} è la perdita totale della cavità. Affinché ci sia amplificazione del segnale la loro differenza deve essere positiva.

In un *laser a semiconduttore index-guided*, l'indice di rifrazione della regione attiva, n_{core} , è più alto di quello dello strato ricoprente del cladding, n_{clad} , in modo da costituire una guida d'onda dielettrica. In condizione di *weakly-guiding*, in cui $(n_{core} - n_{clad}) \ll n_{core}$, come risultato delle code evanescenti del campo, parte dell'energia modale viene persa nel cladding. Per tener conto di tali perdite, si può introdurre un peso Γ nell'equazione precedente:

$$G = e^{[\Gamma(g - \alpha_a) - (1 - \Gamma)\alpha_c]L - \gamma_m}$$

dove α_a e α_c sono, rispettivamente, le perdite per assorbimento nello strato attivo e nel cladding, mentre γ_m è la perdita agli specchi (in questo caso, alle “end-facet”).

Il peso Γ è noto come *fattore di confinamento ottico*, ed è definito come rapporto tra la potenza ottica confinata nella regione attiva e la potenza ottica totale trasmessa

attraverso la struttura.

Esistono vari modelli in letteratura che descrivono l'andamento del guadagno in funzione della concentrazione dei portatori iniettati.

Un modello del primo ordine è quello del coefficiente di guadagno di picco lineare:

$$g \approx g_{peak} = \sigma (N - N_0)$$

dove σ è detto guadagno differenziale, mentre N_0 è la concentrazione di portatori a guadagno unitario, nota come *concentrazione di portatori alla trasparenza*.

Questa relazione ha validità in un ristretto range di polarizzazioni, per densità di portatori confrontabili con N_0 .

Valori tipici di σ per la lega quaternaria $\text{In}_{0.58}\text{Ga}_{0.42}\text{As}_{0.9}\text{P}_{0.1}$, considerata come regione attiva di un laser a 1550 nm, sono $1.5 \div 3 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$.

Un modello del secondo ordine è quello parabolico, estensione del modello del guadagno di picco lineare:

$$g = aN^2 + bN + c$$

dove le costanti a , b , c sono determinate mediante un fitting ai minimi quadrati sui dati disponibili.

Un modello più accurato^[1], basato su osservazioni sperimentali, tiene conto delle proprietà dispersive dei semiconduttori e di un eventuale tuning ad una frequenza diversa dalla frequenza di risonanza (alla quale si avrebbe guadagno massimo, cioè di picco):

$$g(N, \lambda) = \sigma(N - N_0) - A_1[\lambda - (\lambda_0 - A_2(N - N_0))]^2$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda del guadagno di picco alla trasparenza, A_1 determina la larghezza dello spettro del guadagno, A_2 , detto *coefficiente di shift della lunghezza d'onda*, tiene conto della variazione della lunghezza d'onda di picco rispetto alla concentrazione di portatori. Il segno negativo innanzi ad A_2 indica uno shift negativo della lunghezza d'onda di picco.

Valori tipici: $\lambda_0 = 1.63 \mu\text{m}$, $\sigma = 2.7 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$, $A_1 = 1.5 \times 10^{-21} \text{ m}^{-3}$, $A_2 = 2.1 \times 10^{-32} \text{ m}^3$,

$\alpha_{\text{internal loss}} = 4 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$, $N_0 = 1.5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

In un laser a semiconduttore, il pompaggio è realizzato da una sorgente esterna che eroga una corrente di polarizzazione e la inietta nel mezzo attivo, laddove si vuole indurre l'inversione di popolazione.

E', dunque, necessario valutare la relazione tra la concentrazione di portatori, N , e la corrente di iniezione, I .

La prima delle *rate equations*^[3-5] descrive il tasso con cui N varia nel tempo, espresso come bilancio tra un tasso positivo relativo al pompaggio e due tassi negativi, relativi l'uno ai processi di ricombinazione e l'altro alla perdita di portatori per emissione stimolata:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{I}{qV} - R(N) - A(N - N_0) \frac{S}{(1 + \epsilon S)}$$

dove q è la carica dell'elettrone, $R(N)$ è il termine che tiene conto dei processi di ricombinazione (entrambi radiativo e non radiativo), mentre il termine

$A(N - N_0) \frac{S}{(1 + \epsilon S)}$ tiene conto della perdita di portatori per emissione stimolata.

In quest'ultimo termine, si ha $A = \Gamma v_g \alpha V$ con Γ fattore di confinamento ottico, v_g velocità di gruppo [m/s], α costante di guadagno [m⁻¹], V volume della regione attiva [m³], $S(t)$ densità di fotoni del modo laser [m⁻³], ϵ coefficiente di compressione del guadagno [m³].

Nel secondo membro dell'equazione è stato ommesso il tasso positivo relativo alla diffusione di portatori, che risulta trascurabile nei *laser index-guided*, in cui la

larghezza e lo spessore dello strato attivo sono piccoli in confronto alla lunghezza di diffusione dei portatori di 1-3 μm .

Per i *long-wavelength semiconductor lasers*, cioè laser in materiale quaternario $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{As}_y\text{P}_{1-y}$ operanti a 1300 e 1550 nm, il tasso di ricombinazione totale può essere espresso come:

$$R(N) = \frac{N}{\tau_n} + BN^2 + CN^3$$

dove τ_n è il tempo di vita della ricombinazione lineare, B è il coefficiente di ricombinazione molecolare e C è il coefficiente di ricombinazione di Auger.

Il tempo di vita della ricombinazione lineare, τ_n , include i contributi dovuti a ricombinazione nei difetti o ricombinazione di superficie alle estremità del laser.

Il termine cubico CN^3 tiene conto dei processi di ricombinazione di Auger: a causa della interazione coulombiana tra portatori della stessa banda di energia, ciascuna ricombinazione di Auger coinvolge quattro portatori.

La seconda delle rate equations descrive il tasso con cui S varia nel tempo:

$$\frac{dS}{dt} = A(N - N_0)S + \beta_{sp} \frac{N}{\tau_n} - \frac{S}{\tau_s}$$

dove β_{sp} è il coefficiente di emissione spontanea, τ_s tempo di vita del fotone.

Il sistema delle rate equations permette di valutare la risposta a regime del sistema-laser, ovvero di determinare la densità fotonica indotta dall'iniezione di portatori nel mezzo attivo. Valutando la risposta del sistema al variare della corrente iniettata, si

può determinare, a partire dalle rate equations, la curva luce-corrente di un determinato dispositivo.

A partire da una data concentrazione, N_{th} , *densità di soglia dei portatori*, il dispositivo

comincia “il lasing”. Imponendo $\frac{\partial N}{\partial t}=0$ con $S(0)=0$, cioè ricercando una soluzione stazionaria della rate equation dei portatori, si ha:

$$I_{th} = \frac{qVR(N_{th})}{\eta_i}$$

dove I_{th} è la *corrente di soglia*, η_i è l'*efficienza quantica interna* (misura del rapporto tra la ricombinazione radiativa e la ricombinazione totale).

Inoltre, nei semiconduttori, ogni variazione del guadagno del materiale è accompagnato da una variazione di indice di rifrazione, a causa delle relazioni di Kramer-Kroenig. Di conseguenza, ogni variazione di densità dei portatori indurrà una variazione di indice di rifrazione con la seguente dipendenza:

$$n(N) = n_{ini} + \Gamma N \frac{dn}{dN}$$

dove n_{ini} è l'indice di rifrazione del semiconduttore in assenza di corrente e dn/dN è l'indice di rifrazione differenziale del semiconduttore.

Il valore di dn/dN è di solito negativo: l'indice di rifrazione diventa più piccolo all'aumentare della corrente di iniezione. Ogni variazione della densità di portatori avrà effetto sullo spettro del laser.

Si osserva che, alla trasparenza ($N = N_0$), il fattore di amplificazione G deve essere

unitario, e, ciò è verificato solo se $[\Gamma(g - \alpha_a) - (1 - \Gamma)\alpha_c]L - \gamma_m = 0$, ovvero solo se il guadagno del mezzo eguaglia le perdite della cavità:

$$gL = \alpha_a L + \alpha_c \frac{(1 - \Gamma)}{\Gamma} L + \gamma_m$$

Se le perdite delle end-facet sono uguali, cioè, se i due specchi presentano la stessa *riflettività di potenza*, R, la perdita ad essi relativa vale:

$$\gamma_m = \frac{1}{L} \ln\left(\frac{1}{R}\right)$$

Dunque, alla trasparenza, trascurando le perdite del cladding, si può scrivere $\Gamma g = \Gamma \alpha_a + \gamma_m$, cioè, sostituendo l'espressione del guadagno di picco lineare, si ha $\sigma \Gamma (N_{th} - N_0) = \Gamma \alpha_a + \gamma_m$, da cui si ricava la seguente espressione per la densità di soglia dei portatori:

$$N_{th} = N_0 + \frac{\alpha_a L + \ln\left(\frac{1}{R}\right)}{\sigma \Gamma L}$$