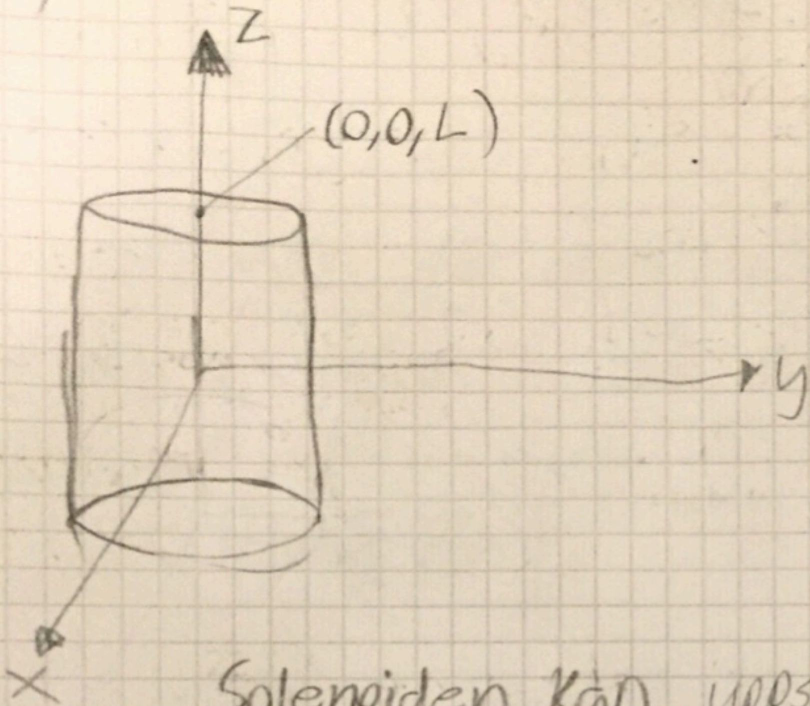
1a)



Solenoiden kan uppskattas som mantelytan på en cylinder eftersom den är tätlindad och trådarna som den utgör är många.

Jag har satt origo i mitt koordinatsystem som mittpunkten av cylindern/solenoiden (masscentrum av cylindern). Den positiva z-axeln sammanfaller med solenoidens symmetrilinje enligt min skiss av koordinatsystemet ovan.

Cylindern ovan kan beskrivas med alla vektorer (x, y, z), där $x^2+y^2=R^2$, $-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$ är uppfyllt.

Fortsättning 1a:

En parametrisering till detta kan vara $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$, $z = z$

där $x(\varphi) = R\cdot\cos(\varphi)$, $y(\varphi) = R\cdot\sin(\varphi)$

$0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\frac{L}{2} \leqslant z \leqslant \frac{L}{2}$ ($\varphi = 0$ vid x-axeln. Positiv rotation är kring positiva z-axeln motsols.)

Ortsvektorn till punkter på mantelytan till cylindern är $(R\cdot\cos(\varphi), R\cdot\sin(\varphi), z) = \vec{r}$

1b) $d\vec{S}$ ges av kryssprodukten

$d\vec{S} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \times \frac{d\vec{r}}{dz} \cdot d\varphi dz$, riktningen av $d\vec{S}$ blir radiellt utåt från cylindern.

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = (-R\cdot\sin(\varphi), R\cdot\cos(\varphi), 0)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = (0, 0, 1)$$

$$d\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -R\cdot\sin(\varphi) & R\cdot\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\varphi dz =$$

$$= (R\cdot\cos(\varphi), R\cdot\sin(\varphi), 0)\, d\varphi dz$$

1c) $B = (B_x, B_y, B_z)$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_1 \, , \; \vec{e}_y = \vec{e}_2 \, , \; \vec{e}_3 = \vec{e}_z$$

$$d\vec{F} = d\vec{I} \times \vec{B} = \Big(I_0 n \cdot \overbrace{\vec{e}_z}^{\vec{e}_3} \times \overbrace{\big(R \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_x + R \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y\big)}^{\text{Från 1b}} \cdot d\varphi dz\Big) \times \big(B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z\big) =$$

$$= \big(R \cdot I_0 \cdot n \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_y - R \cdot I_0 \cdot n \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_x\big) \times \big(B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z\big) d\varphi dz =$$

$$= R \cdot I_0 \cdot n \cdot \Big(\big(-B_x \cdot \cos(\varphi) - B_y \cdot \sin(\varphi)\big) \cdot \vec{e}_z + B_z \cos(\varphi) \vec{e}_x + B_z \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_y\Big) d\varphi dz$$

1d)

$$\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$$

Cylinderkoordinater ges av:

$\vec{e}_r = \cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y$, $\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y$

$\vec{x}_0 = 0$

Eftersom vektorn $\vec{B}$ har konstant värde och solenoiden är symmetrisk kring z-axeln oberoende av hur vi placerar x & y axlarna så kan vi sätta koordinataxlarna så att $\vec{B}$ hamnar i xz planet och därmed $B_y = 0$

$$\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_z\vec{e}_z$$

$$B_r = \cos(\varphi)B_x$$

Ytan S beskrevs i a) uppgiften.

$$\vec{T} = \int_S (\vec{x} \times d\vec{F}) = RI_0 n \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \left(\int_0^{2\pi} (R\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \times (-B_r\vec{e}_z + B_z\vec{e}_r) d\varphi \right) dz = I_0 Rn \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \left(\int_0^{2\pi} (RB_r + B_z z)\vec{e}_\varphi d\varphi \right) dz$$

$$= I_0 Rn \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \left(\int_0^{2\pi} (RB_x\cos(\varphi) + B_z z)(-\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y) d\varphi \right) dz$$

$$= I_0 Rn \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \left(\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \cdot RB_x \sin(2\varphi) - B_z z\sin(\varphi)\right) d\varphi \right) dz \cdot \vec{e}_x$$

$$I_0 Rn \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \left(\int_0^{2\pi} \left(RB_x\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\varphi)}{2}\right) + B_z z\cos(\varphi)\right) d\varphi \right) dz \cdot \vec{e}_y$$

$$I_0 Rn\left(\int_{-\frac{L}{2}}^{L/2}\left(\left[\frac{1}{4}\cdot RB_x\cos(2\varphi)+zB_z\cos(\varphi)\right]_0^{2\pi}\right)dz\cdot\vec{e}_x\right.$$

$$\left.\int_{-\frac{L}{2}}^{L/2}\left(\left[RB_x\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)+B_z z\sin(\varphi)\right]_0^{2\pi}\right)dz\cdot\vec{e}_y\right)$$

$$=\int_{-\frac{L}{2}}^{L/2}\left(I_0 R^2 n B_x\pi\, dz\right)\cdot\vec{e}_y=\boxed{LI_0R^2nB_x\pi\cdot\vec{e}_y}$$